Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
1999-2000

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 2 - Durée 1h30
Lundi 26 Juin 2000

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ qui au quadruplet $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ associe $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5,92x_3$. Montrer que
$$A = \{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(x) = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?

2. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculez-les si $n = 4$ et une matrice de f est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Quel est le polynôme caractéristique de f si f est nilpotent ? Justifiez. Réciproque. Même question avec le polynôme minimal.

5. Si $f^2 - f - 3Id_E = 0$, quelles peuvent-être les valeurs propres de f ?

6. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles. Donner un exemple de matrice symétrique à coefficients complexes qui n'est pas diagonalisable.

7. Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$
   (a) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
   (b) Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
   (c) Est-ce que Q est positive ? non dégénérée ? Quel est son rang ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 17/4 & -7/4 & 1/4 & 1/4 \\ 5/4 & 5/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 5/2 & 1/2 \\ -7/2 & 9/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A a deux valeurs propres entières.
2. Déterminer les sous-espaces propres (on cherchera les vecteurs propres x_1, x_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1 < \lambda_2$ de sorte que la première composante de x_1 soit 0, et la première composante de x_2 soit 1). En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer les sous-espaces caractéristiques.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.
7. Calculer A^n.