Module M08 - Epreuve d'Algèbre-Analyse des données 2

Session 1 - Durée 1h30
Lundi 10 Janvier 2000

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. (a) Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculez-les si $n = 4$ et une matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
   Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.
   Supposant que $f^2 - f - Id_E = 0$, quelles peuvent-être les valeurs propres de f ?

2. Donner un critère pour qu'un endomorphisme soit nilpotent, ce au moyen du polynôme caractéristique ; au moyen du polynôme minimal.

3. Soient x et y deux variables statistiques définies sur un ensemble Ω. Exprimer la moyenne de xy et la variance de $x + y$ lorsque la covariance de x et y est nulle. Justifier.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus grande valeur propre.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.

Exercice 2

Soient $u = (1, 2, 3)$ et $v(3, 2, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni du produit scalaire ordinaire, déterminer la projection orthogonale d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ sur le vecteur u. Déterminer la projection $p_H(x)$ de x sur le sous-espace vectoriel H engendré par les vecteurs u et v. Ecrire la matrice de p_H (l'espace $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base canonique).