UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 1 - Durée 2h00
Jeudi 31 Mai 2001

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculer-les si $n = 4$ et une matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.
4. Enoncer la caractérisation des endomorphismes nilpotents au moyen de leur polynôme caractéristique et de leur polynôme minimal. Prouvez-la.
5. Si $f^2 - f - Id_E = 0$, quelles peuvent-être les valeurs propres de f ?
6. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Démonstration.
7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la distance euclidienne, quelle est la distance de a à $f^{-1}(0)$? Calculez-la si

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \quad \text{et} a = (1, 2, 3, 4)$$

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 2 & -3/8 & 0 \\ -1/2 & 0 & 5/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres (on vérifiera que 2 est valeur propre multiple).
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus petite valeur propre.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.

Exercice 2

Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4$$

1. Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
2. Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
3. Est-ce que Q est positive ? non dégénérée ? Quel est son rang ?
4. Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires.