Université Claude Bernard Lyon 1 — DEUG MASS

2000-2001

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 2 - Durée 1h30

Mardi 3 Juillet 2001

L'utilisation de calculatrices et de documents de toute nature n'est pas autorisée.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculez-les si $n = 4$ et une matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Quel est le polynôme caractéristique de f si f est nilpotent ? Justifiez. Réciproque. Même question avec le polynôme minimal.
4. Si $f^2 + f - 2Id_E = 0$, quelles peuvent-être les valeurs propres de f ?
5. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ et rappelez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
6. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $| < x, y > | = \|x\| \, \|y\|$ si et seulement si x et y sont proportionnels.
7. Montrer que toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Supposant l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne, exprimer la distance de $y = (y_1, \ldots, y_n)$ à $f^{-1}(0)$? Calculez-la si

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \quad \text{et } y = (1, 2, 3, 4)$$

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus grande valeur propre.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.

Exercice 2

Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$$

1. Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
2. Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
3. Est-ce que Q est positive ? non dégénérée ? Quel est son rang ?
4. Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires indépendantes.