Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
2001-2002

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 2 - Durée 1h30
Jeudi 27 Juin 2002

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculer les si $n = 4$ et une matrice de f est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Montrer que le polynôme minimal de f divise le polynôme caractéristique, puis qu'il a les mêmes racines.
4. Enoncer la caractérisation au moyen de leur polynôme caractéristique et de leur polynôme minimal. Prouver la.
5. Si $f^2 - 2f - Id_E = 0$, quelles peut être les valeurs propres de f ? Quel peut être le polynôme minimal de f ?
6. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La prouver. Montrer que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|.\|y\|$ si et seulement si x et y sont proportionnels.
7. Démontrer que toute matrice carrée à coefficients réels a toutes ses valeurs propres réelles.
8. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 30x_1x_3 + 126x_3^2 + 148x_2^2 - 240x_2x_3 + 8x_1x_2$$
   (a) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
   (b) Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quel est son rang ?
   (c) Décomposer Q en somme et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.
   (d) Dire pourquoi la forme polaire est un produit scalaire.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 7/3 & 4/3 & -5/6 \\ 2/3 & 1/3 & 7/3 & -1/3 \\ 1 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A a trois valeurs propres entières.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan J.
4. Déterminer les sous-espaces caractéristiques.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.