Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
2002-2003

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 1 - Durée 2h00
Lundi 2 Juin 2003

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculer les si $n = 4$ et une matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f ont les mêmes racines.
4. Qu'est-ce qu'un endomorphisme nilpotent ? Enoncer la caractérisation au moyen du polynôme caractéristique et également au moyen du polynôme minimal. Prouver la.
5. Si $4f^2 - 2f + Id_E = 0$, quelles peut être les valeurs propres de f ?
6. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La prouver. Montrer que pour toute forme linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \langle x|a \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne, calculer la distance du point $a = (2, 1, -5)$ au plan d'équation $3x + 2y - z = 0$.
8. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 6x_1x_3 + 14x_3^2 + 37x_2^2 + 40x_2x_3 - 2x_1x_2$$

   (a) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
   (b) Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quel est son rang ?
   (c) Décomposer Q en somme et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A a une seule valeur propre.
2. Déterminer le sous-espace propre (on choisira deux vecteurs dont les premières composantes sont respectivement $0, 0$ et $1, -2$). En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer le sous-espace caractéristique.
4. Ecrire la matrice de Jordan J.
5. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
6. Calculer le polynôme minimal de A.