Université Claude Bernard Lyon 1 DEUG MASS
2002-2003

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Session 2 - Durée 1h30
Lundi 7 Juillet 2003

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

1. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de f. Calculer les si $n = 4$ et une matrice de f est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{respectivement} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions. Calculer-les si une matrice de f est
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Enoncer la caractérisation des endomorphismes nilpotents au moyen de leur polynôme caractéristique et de leur polynôme minimal. Prouver-la.

4. Donner la définition d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La prouver. Montrer que pour toute forme linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \langle x|a \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne, calculer la distance du point $a = (1, 3, -1)$ au plan d'équation $5x - 2y + 3z = 0$.

6. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
   (a) Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?
   (b) Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quel est son rang ?
   (c) Décomposer Q en somme et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A est déterminer les sous-espaces propres. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
2. Ecrire la matrice de Jordan J.
3. Déterminer le sous-espace caractéristique associé à la plus petite valeur propre.
4. Ecrire une matrice de changement de base. Calculer son inverse.
5. Calculer le polynôme minimal de A.