Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence Sciences et Technologies
2007-2008

Mathématiques III - Algèbre

Session 2 - Durée 1h30
24 Janvier 2008

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Questions générales

Démontrer les assertions suivantes dans lesquelles E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Les points indiqués pour chaque question seront attrbués pour une preuve **à la fois correcte et rédigée avec soin.**

1. *(1.25 pt).* Soit Q un polynôme annulateur d'un endomorphisme u de E. Toute valeur propre de u est racine de Q.
2. *(1.25 pt).* Un endomorphisme de E de rang 1 est diagonalisable si et seulement s'il est de trace non nulle.
3. *(1.25 pt).* Deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.
4. *(1.25 pt).* Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polnôme caractéristique $(X-5)^4(X-4)^2$ et même polynôme minimal $(X-5)^2(X-4)$. Justifier la raison pour laquelle vos deux matrices ne sont pas semblables.

Barème : Pour les exercices suivants, les points indiqués seront accordés aux réponses **à la fois correctes et argumentées de façon convaincante**. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 pt).* Montrer que 1 est valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre de A associé.
2. *(1 pt).* Déterminer toutes les autres valeurs propres de A.
3. *(1 pt).* La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. *(1 pt).* Déterminer le polynôme minimal de A.
5. *(1.25 pt).* Exprimer, en fonction de la matrice A, les matrices des projections de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces propres de A.
6. *(1.25 pt).* Exprimer, pour tout entier $k \geq 1$, la matrice A^k en fonction de la matrice A.
7. *(1.25 pt).* Calculer $\lim_{k \to +\infty} A^k$.

Exercice 2

1. *(1.25 pt).* Calculer la matrice $e^{J(\lambda)}$, où $J(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est le bloc de Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

2. *(1.5 pt).* Montrer que les matrices $e^{J(\lambda)}$ et $J(e^{\lambda})$ sont semblables.

3. *(1.5 pt).* Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est scindé et J sa réduite de Jordan. Montrer que e^A et e^J sont semblables.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le polynôme caractéristique est

$$P_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \dots (X - \lambda_p)^{h_p}, \quad \text{avec } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j$$

4. *(1.5 pt).* Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme e^u.

5. *(1.5 pt).* Montrer que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i et le sous-espace propre de e^u associé à la valeur propre e^{λ_i} sont de même dimension.