UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Contrôle Continu - Durée 1h30
Vendredi 28 Mars 2008

L'usage de toute calculatrice est interdit. Aucun document personnel n'est autorisé.

Questions de cours

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

1. Définir ce qu'est pour f une valeur propre, un vecteur propre et un sous-espace propre.
   (On ne fera pas intervenir le polynôme caractéristique dans cette question).
2. Définir le polynôme caractéristique χ_f et le polynôme minimal π_f de f.
3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
4. Enoncer trois conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable.
   (Ces conditions devront faire intervenir des polynômes).

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = -A^2 + 4A + 4I_5$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$?

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui correspond, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
   (Un produit d'au plus trois matrices explicites sera une réponse suffisante)

Exercice 3

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.
3. Calculer le polynôme minimal de A.
4. En déduire l'expression de A^{-1}.
5. Indiquer clairement une méthode possible pour calculer A^n ($n \geq 1$) à l'aide de la question 3.