Contrôle Continu - 28/03/08

(Corrigé)

Questions de cours

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

1. **Définir ce qu'est pour f une valeur propre, un vecteur propre et un sous-espace propre.**
   - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est une valeur propre pour f si et seulement si $\exists X \in E \backslash \{0\} \ / \ f(X) = \lambda X$.
   - Les vecteurs $X \in E$ vérifiant la relation précédente sont appelés les vecteurs propres pour f associés à la valeur propre λ.
   - Le sous-espace propre E_λ de f associé à une valeur propre λ est : $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id)$ (i.e. c'est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ, auquel on rajoute le vecteur nul)
2. **Définir le polynôme caractéristique χ_f et le polynôme minimal π_f de f.**
   - On définit le polynôme caractéristique χ_f par $\chi_f(X) = \det(f - XId)$.
   - L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbb{C}[X]$. En particulier, c'est un idéal principal, engendré par un unique polynôme unitaire. Ce polynôme est appelé le polynôme minimal de f, noté π_f.
3. **Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.**
   Plusieurs versions équivalentes sont possibles :
   - "Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de f" : $\chi_f(f) = 0$.
   - "Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique de f" : $\pi_f \,|\, \chi_f$
4. **Enoncer trois conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable.**
   - f diagonalisable $\iff$ $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, scindé simple, tel que $P(f) = 0$.
   - f diagonalisable $\iff$ π_f scindé simple.
   - f diagonalisable $\iff$ χ_f scindé et $\forall \lambda \in Sp(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda$
   (où on a noté m_λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_f)

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = -A^2 + 4A + 4I_5$.

1. **Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.**
   On a immédiatement $A^3 + A^2 - 4A = 4I_5$, soit
   $$A.\left[\frac{1}{4}(A^2 + A - 4I_5)\right] = I_5$$
   On en déduit ainsi que A est bien inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(A^2 + A - 4I_5)$.
2. **A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$?**
   On a $P(A) = 0$ avec
   $$P(X) \ = \ X^3 + X^2 - 4X - 4 \ = \ X^2(X+1) - 4(X+1) \ = \ (X+1)(X-2)(X+2)$$
   On a donc l'existence d'un polynôme annulateur de A qui est scindé simple. D'après la condition nécessaire et suffisante fournie à la question de cours 4, A est donc bien diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui correspond, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.**

   On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

   Les valeurs propres de f sont donc 1 (v.p. double) et 2 (v.p. simple).

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in \ E_1(f) \iff AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x &= x \\ -x+y+z &= y \\ -x+2z &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc on a

$$\boxed{E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\begin{aligned} X \in \ E_2(f) \iff AX = 2X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x &= 2x \\ -x+y+z &= 2y \\ -x+2z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= z \\ z &= z \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc on a

$$\boxed{E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

2. **Montrer que f est diagonalisable.**
   - χ_f est bien scindé : $\chi_f(X) = (-1)^3(X-1)^2(X-2)$
   - On a $\dim(E_1(f)) = 2$ et $\dim(E_2(f)) = 1$.

   Donc f est bien diagonalisable d'après la condition nécessaire et suffisante de la question de cours 4.

3. **Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.**

   Posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Alors (u_1, u_2, u_3) est bien une base car, f étant diagonalisable, les espaces propres sont en somme directe.

   De plus, dans la base (u_1, u_2, u_3), f a pour matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. **Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.**
   Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   La matrice de passage exprime les nouveaux vecteurs u_1, u_2, u_3 dans l'ancienne base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Pour voir si P est inversible, calculons son déterminant :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

   donc P est bien inversible. On a alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t com(P) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.**

   On a donc prouvé par les questions précédentes que $A = PA'P^{-1}$. Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = (PA'P^{-1})^n = P(A')^n P^{-1}$$

   donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Explicitement,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - 2^n & 1 & -1 + 2^n \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 3

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Montrer que A n'est pas diagonalisable.**
   Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda-2)^2 = (1-\lambda)(2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

   Les valeurs propres de A sont donc 1 (simple) et 2 (triple).
   Calculons les sous-espaces propres correspondants.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} X \in E_1(f) \iff AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ -x+3y-z+t & = & y \\ -x+y+z & = & z \\ 2t & = & t \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ y & = & x \\ z & = & x \\ t & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Donc on a

$$\boxed{E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Vect(u)}$$

$$X \in E_2(f) \iff AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 2x \\ -x+3y-z+t & = 2y \\ -x+y+z & = 2z \\ 2t & = 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = y \\ z & = y \\ t & = 0 \end{cases}$$

Donc on a

$$\boxed{E_2(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

On remarque donc en particulier que $\dim(E_2(f)) \neq 3$: f n'est donc pas diagonalisable.

2. **Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.**
$\lambda = 1$ étant une valeur propre simple, le bloc de Jordan est entièrement déterminé.
Construisons donc la suite de noyaux des puissances de $M = A - 2I_4$.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \dim(\mathrm{Ker}(M)) = 1$$

On peut déjà dire qu'il y aura 1 unique bloc de Jordan associé à la valeur propre 2.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit facilement que $\ker(M^2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: de dimension 2.

$$M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\ker(M^3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: de dimension 3.

Cela signifie que la taille du bloc de Jordan (unique) associé à la valeur propre 2 est de taille 3.

On prend $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M^3) \backslash \text{Ker}(M^2)$.

Puis, $v_2 = Mv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors dans la base (u, v_3, v_2, v_1), la réduite de Jordan de A est de la forme

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

3. **Calculer le polynôme minimal de A.**
   Le polynôme minimal de A se lit directement sur la réduite de Jordan :

$$\pi_A(X) = (X-1)(X-2)^3$$

   On remarque qu'ici, $\pi_A = \chi_A$.

4. **En déduire l'expression de A^{-1}.**
   En développant le polynôme minimal, on a :

$$(A-I)(A-2)^3 = (A-1)(A^3 - 6A^2 + 12A - 8I) = A^4 - 7A^3 + 18A^2 - 20A + 8I = 0$$

   D'où

$$A\left[\frac{-1}{8}(A^3 - 7A^2 + 18A - 20I)\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{-1}{8}(A^3 - 7A^2 + 18A - 20I)}$$

5. **Indiquer clairement une méthode possible pour calculer A^n pour tout $n \geq 1$ à l'aide de la question 3.**
   Le polynôme minimal est un polynôme de degré 4, annulateur de A.
   Donc si on écrit la division euclidienne de X^n par π_A, on trouve : $A^n = R_n(A)$ avec $deg(R_n) < 4$:

$$\exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \ / \ X^n = \pi_A.Q + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

   Il suffit alors de trouver les 4 inconnues a_0, a_1, a_2, a_3, en prenant par exemple des valeurs particulières :
   – Les valeurs $x = 1$ et $x = 2$ fournissent 2 équations.
   – En dérivant la formule précédente, avec $x = 2$ on trouve une 3ème équation.
   – En dérivant une seconde fois, avec $x = 2$, on trouve une 4ème équation.
   La résolution de ce système permet alors de trouver les valeurs cherchées, d'où l'expression de A^n, pour tout $n \geq 1$.