Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008

L2 MASS41 Algèbre

Devoir 1 pour le 12 Mars

Exercice 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker} f$. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. Quel est le rang de f (*i.e.* la dimension de $\mathrm{Im} f$) ? Donner une base de $\mathrm{Im} f$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
4. On considère les vecteurs $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = -6e_2 + 3e_3$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $w = -4e_1 - 6e_2 + 7e_3$. Calculer $f(w)$ en fonction de w.
6. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2, v_3. Donner la matrice $A' = mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
7. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
8. Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f (sous forme factorisée)
2. Déterminer les valeurs propres de f et les espaces propres correspondants.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
5. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.