Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Devoir 1 pour le 12 Mars

Corrigé

Exercice 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix} = A$.

1. **Déterminons Ker$f$**

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \ \mathrm{Ker} f \iff AX = 0 \iff \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -8x - 8y - 12z & = & 0 \\ -2x - 2z & = & 0 \\ 9x + 8y + 13z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ -8(-z) - 8y - 12z & = & 0 \\ 9(-z) + 8y + 13z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ -8y - 4z & = & 0 \\ 8y + 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -1/2z \\ z & = & z \end{array} \right.$$

   Donc on a

$$\boxed{\mathrm{Ker} f = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

   Déterminons donc la dimension et une base de Ker$f$.

   En posant $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a vu que $\mathrm{Ker} f = Vect\,(u)$.

   Comme u est non nul, il est donc libre dans $\mathbb{R}^3$: (u) est une base de Ker$f$ et on en déduit que :

$$\boxed{\dim\,(\mathrm{Ker} f) = 1}$$

2. **Quel est le rang de f (*i.e.* la dimension de Imf) ?**

   Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\,(\mathrm{Ker} f) + \dim\,(\mathrm{Im} f)$$

   Donc on en déduit que $\mathrm{rg}(f) = \dim\,(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\,(\mathrm{Ker} f) = 3 - 1 = 2$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$$

Cherchons une base de Imf.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in \ \mathrm{Im}f \quad &\iff \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\alpha - 8\beta - 12\gamma \\ -2\alpha - 2\gamma \\ 9\alpha + 8\beta + 13\gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a ainsi que $\mathrm{Im}f = Vect\left(\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}\right)$.
Or, on a vu que $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Donc la famille précédente est bien génératrice mais est forcément liée. Cherchons donc une sous-famille de deux vecteurs qui, elle, soit libre.
Choisissons $U = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (à cause du 0 dans V), donc forment une famille libre.
On a alors que $\mathrm{Im}f = Vect\,(U, V)$, avec (U, V) libre : c'est ainsi une base de Imf.

$$\boxed{\mathrm{Im}f = Vect\left(\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right)}$$

3. **Montrons que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$.**

   Il s'agit ici de montrer que $\begin{cases} \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\} \\ \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f \end{cases}$

   Déterminons Im$f \cap$ Ker$f$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$.

   On a écrit que $\mathrm{Ker}f = Vect(u)$, donc ici : $X \in \mathrm{Ker}f \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   De plus, $X \in \mathrm{Im}f \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\alpha - 8\beta - 12\gamma \\ -2\alpha - 2\gamma \\ 9\alpha + 8\beta + 13\gamma \end{pmatrix}$

   Donc si X vérifie les deux équations précédentes, on a nécessairement :

   $$\begin{pmatrix} -8\alpha - 8\beta - 12\gamma \\ -2\alpha - 2\gamma \\ 9\alpha + 8\beta + 13\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -a/2 \\ a \end{pmatrix}$$

   On obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -8\alpha-8\beta-12\gamma & = & -a \\ -2\alpha-2\gamma & = & -a/2 \\ 9\alpha+8\beta+13\gamma & = & a \end{array}\right. \overset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -8\alpha-8\beta-12\gamma & = & -a \\ -2\alpha-2\gamma & = & -a/2 \\ \alpha+\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations du système fournissent bien que $a=0$. On en tire que $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et on a ainsi montré que $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f\subset\{0\}$.
Mais la réciproque est claire. En effet, comme $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$, ils contiennent l'élément neutre : on a toujours $\{0\}\subset\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f$.
Donc on a bien l'égalité cherchée : $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f=\{0\}$.

Montrons à présent que $\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f=\mathbb{R}^3$.

On a déjà une inclusion : $\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f\subset\mathbb{R}^3$ car la somme de deux sev de $\mathbb{R}^3$ est toujours incluse dans $\mathbb{R}^3$.
Regardons donc les dimensions.
On a la formule suivante :

$$\dim(\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f)=\dim(\mathrm{Im}f)+\dim(\mathrm{Ker}f)-\dim(\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f)$$

Or, ici on a $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f=\{0\}$ donc $\dim(\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f)=0$.
On a donc :

$$\dim(\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f)=\dim(\mathrm{Im}f)+\dim(\mathrm{Ker}f)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$$

En conclusion, on a $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f\subset\mathbb{R}^3\\ \dim(\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f)=\dim(\mathbb{R}^3)\end{array}\right.$. D'où $\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f=\mathbb{R}^3$.
Comme on a montré précédemment que $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Ker}f=\{0\}$, on peut bien écrire que la somme est directe :

$$\boxed{\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f}$$

4. **On considère les vecteurs $v_1=e_1-e_3$, $v_2=-6e_2+3e_3$ et $v_3=2e_1+e_2-2e_3$.**
Montrons que $\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Vérifions déjà que $\mathcal{B}'$ est bien libre dans $\mathbb{R}^3$. Regardons donc $\det(v_1,v_2,v_3)$.
Pour cela, écrivons v_1,v_2,v_3 en vecteurs :

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}\quad,\quad v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut alors :

$$\det(v_1,v_2,v_3)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&-6&1\\-1&3&-2\end{vmatrix}=12+0+0-12-3-0=-3\neq0$$

Donc (v_1,v_2,v_3) est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

5. **Calculons $f(w)$ pour $w=-4e_1-6e_2+7e_3$.**

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & f(-4e_1-6e_2+7e_3) \\ & = & -4f(e_1)-6f(e_2)+7f(e_3) \\ & = & -4(-8e_1-2e_2+9e_3)-6(-8e_1+8e_3)+7(-12e_1-2e_2+13e_3) \\ & = & 32e_1+8e_2-36e_3+48e_1-48e_3-84e_1-14e_2+91e_3 \\ & = & -4e_1-6e_2+7e_3 \\ & = & w \end{array}$$

Donc

$$\boxed{f(w)=w}$$

6. **Calculons $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$.**

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & f(e_1 - e_3) \\ & = & f(e_1) - f(e_3) \\ & = & (-8e_1 - 2e_2 + 9e_3) - (-12e_1 - 2e_2 + 13e_3) \\ & = & 4e_1 - 4e_3 \\ & = & 4(e_1 - e_3) \\ & = & 4v_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(v_2) & = & f(-6e_2 + 3e_3) \\ & = & -6f(e_2) + 3f(e_3) \\ & = & -6(-8e_1 + 8e_3) + 3(-12e_1 - 2e_2 + 13e_3) \\ & = & 12e_1 - 6e_2 - 9e_3 \\ & = & 12(e_1 - e_3) + (-6e_2 + 3e_3) \\ & = & 12v_1 + v_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(v_3) & = & f(2e_1 + e_2 - 2e_3) \\ & = & 2f(e_1) + f(e_2) - 2f(e_3) \\ & = & 2(-8e_1 - 2e_2 + 9e_3) + (-8e_1 + 8e_3) - 2(-12e_1 - 2e_2 + 13e_3) \\ & = & (-16 - 8 + 24)e_1 + (-4 + 4)e_2 + (18 + 8 - 26)e_3 \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc

$$\boxed{f(v_1) = 4v_1} \quad , \quad \boxed{f(v_2) = 12v_1 + v_2} \quad , \quad \boxed{f(v_3) = 0}$$

Ecrivons à présent la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$:

$$A' = mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. **Ecrivons la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.**

$$P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

Calculons P^{-1}.
On a montré à la question 4 que $\det(P) = -3 \neq 0$. Donc P est bien inversible. On peut par exemple calculer P^{-1} avec la formule de la comatrice :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\ {}^t com(P) = -\frac{1}{3}\ {}^t\begin{pmatrix} 9 & -1 & -6 \\ 6 & 0 & -3 \\ 12 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

8. **Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.**

Comme A et A' représentent le même endomorphisme f respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation suivante :

$$A = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.A'.P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = PA'P^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A' = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.A.P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P^{-1}AP$$

Donc en principe, en calculant $P^{-1}AP$, on devrait retrouver l'expression de A' trouvée précédemment :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ -4 & -9 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On retrouve bien la matrice obtenue dans la question 6.

Exercice 2

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de f.**

   Le polynôme caractéristique de f est défini par $\chi(\lambda) = \det(f - \lambda Id) = \det(A - \lambda I_3)$.

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)(1-\lambda)(6-\lambda) + 12 + 16 + 12(1-\lambda) + 4(-1-\lambda) - 4(6-\lambda) \\
&= (\lambda^2 - 1)(6-\lambda) + 28 + 12 - 12\lambda - 4 - 4\lambda - 24 + 4\lambda \\
&= (-\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 6) + 12 - 12\lambda \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \qquad (\text{ 1 est racine évidente...}) \\
&= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) \\
&= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{\chi(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}$$

2. **Déterminons les valeurs propres de f.**

   On sait que les valeurs propres de f sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Les valeurs propres de f sont donc exactement 1, 2 et 3.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2, 3\}}$$

   Déterminons les espaces propres de f.

- $\underline{\lambda = 1}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \ E_1(f) \iff AX = 1.X \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y + 4z & = & x \\ -2x + y + 2z & = & y \\ -3x - 2y + 6z & = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y + 4z & = & 0 \\ -2x + 2z & = & 0 \\ -3x - 2y + 5z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & z \\ -2(z) - 2y + 4z & = & 0 \\ -3(z) - 2y + 5z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & z \\ -2y + 2z & = & 0 \\ -2y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{cases}$$

Donc on a $\boxed{E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

- $\underline{\lambda = 2}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \ E_2(f) \iff AX = 2.X \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y + 4z & = & 2x \\ -2x + y + 2z & = & 2y \\ -3x - 2y + 6z & = & 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 2y + 4z & = & 0 & (L_1) \\ -2x - y + 2z & = & 0 & (L_2) \\ -3x - 2y + 4z & = & 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 0 & (L_1 - 2L_2) \\ y & = & 2z \\ z & = z \end{cases}$$

Donc on a $\boxed{E_2(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

– $\underline{\lambda = 3}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \ E_2(f) \iff AX = 3.X \iff \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x-2y+4z & = & 3x \\ -2x+y+2z & = & 3y \\ -3x-2y+6z & = & 3z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} -4x-2y+4z & = & 0 & (L_1) \\ -2x-2y+2z & = & 0 & (L_2) \\ -3x-2y+3z & = & 0 & (L_3) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 2x+y-2z & = & 0 & (L_1) \\ -2x+2z & = & 0 & (L_1-L_2) \\ -x+z & = & 0 & (L_1-L_3) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc on a $\boxed{E_3(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

3. **Montrons que f est diagonalisable.**

   On a trouvé 3 valeurs propres pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc f est bien diagonalisable.

   Comme argument, on peut utiliser également le fait que le polynôme était scindé simple, qui est une condition suffisante de diagonalisabilité.

4. **Déterminons une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.**

   On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On a donc vu précédemment que

$$f(u_1) = u_1,\ f(u_2) = 2u_2,\ f(u_3) = 3u_3$$

   Vérifions que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons déjà que $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 = 1 \neq 0$$

   Donc (u_1, u_2, u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   Si on note A' la matrice de l'endomorphisme f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, on a :

$$\boxed{A' = mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

5. **Ecrivons la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.**

P représente la matrice qui exprime les nouveaux vecteurs (ceux de $\mathcal{B}'$) dans l'ancienne base (ceux de $\mathcal{B}$) :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Calculons P^{-1}.

Le déterminant de P a été calculé à la question précédente : $\det(P) = 1 \neq 0$, donc P est bien inversible. On a alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\ {}^t com(P) = {}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

6. **Calcul de A^n pour tout $n \geq 1$.**

On a vu que $A = PA'P^{-1}$. D'où, pour tout $n \geq 1$, :

$$A^n = PA'P^{-1}.PA'P^{-1}.\dots.PA'P^{-1} = P\left(A'\right)^n P^{-1}$$

Comme $A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} A^n = P(A')^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2^n & 0 & 2^n \\ -3^n & -3^n & 2.3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-3^n & 1-3^n & -2+2.3^n \\ 2-2^{n+1} & 1 & -2+2^{n+1} \\ 2-2^n-3^n & 1-3^n & -2+2^n+2.3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2-3^n & 1-3^n & -2+2.3^n \\ 2-2^{n+1} & 1 & -2+2^{n+1} \\ 2-2^n-3^n & 1-3^n & -2+2^n+2.3^n \end{pmatrix}}$