Devoir 2 pour le 23 Avril

Corrigé

Exercice 1

Soit φ la forme bilinéaire de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad , \quad \varphi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$$

1. **Montrons que φ est une forme bilinéaire symétrique.**
Soient P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a clairement :
– $\varphi(Q,P) = Q(1)P(-1) + Q(-1)P(1) = \varphi(P,Q)$
– $\varphi(\lambda P + Q, R) = (\lambda P + Q)(1)R(-1) + (\lambda P + Q)(-1)R(1) = \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
φ est donc bien une forme bilinéaire.
Donnons sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On calcule les éléments $\varphi(P,Q)$ pour P, Q éléments de la base :

$$\begin{array}{ll}
\varphi(1,1) = 1.1 + 1.1 = 2 & \varphi(1,X) = \varphi(X,1) = 1.1 + (-1).1 = 0 \\
\varphi(X,X) = 1.(-1) + (-1).1 = -2 & \varphi(1,X^2) = \varphi(X^2,1) = 1.(-1)^2 + 1.(1)^2 = 2 \\
\varphi(X^2,X^2) = 1^2.(-1)^2 + (-1)^2.1 = 2 & \varphi(X,X^2) = \varphi(X^2,X) = 1.(-1)^2 + (-1).1^2 = 0
\end{array}$$

La matrice de φ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est ainsi :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

2. **On considère la famille $\mathcal{B}' = (1 - X^2, X, X^2)$.**
   (a) **Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.**
   Posons P la matrice qui exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Comme $\det(P) = 1 \neq 0$ (P est triangulaire inférieure), on a bien que P est inversible. Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3 : $\mathcal{B}'$ est donc bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Déterminons la matrice de φ dans cette base.
   La matrice de φ dans cette base est donnée par :

$$\begin{aligned}
A' = {}^tPAP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

(b) **En déduire l'expression, dans cette base, de φ et de la forme quadratique q associée.**
Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans la base $\mathcal{B}'$, on note :

$$P(X) = a_0(1-X^2) + a_1X + a_2X^2$$
$$Q(X) = b_0(1-X^2) + b_1X + b_2X^2$$

On a alors :

$$\boxed{\varphi(P,Q) = -2a_1b_1 + 2a_2b_2}$$
$$\boxed{q(P) = -2a_1^2 + 2a_2^2}$$

(c) **Déterminons l'ensemble J_q des vecteurs isotropes pour q.**
On cherche donc à déterminer $J_q = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ q(P) = 0\}$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$: $P = a_0(1-X^2) + a_1X + a_2X^2$

$$P \in J_p \iff -2a_1^2 + 2a_2^2 = 0 \iff a_1^2 = a_2^2 \iff a_1 = \pm a_2$$

Si $a_1 = a_2$, on a alors $P(X) = a_0(1-X^2) + a_1(X+X^2)$. D'où $P \in Vect(1-X^2, X+X^2)$
Si $a_1 = -a_2$, on a alors $P(X) = a_0(1-X^2) + a_1(X-X^2)$. D'où $P \in Vect(1-X^2, X-X^2)$

L'ensemble des vecteurs isotropes est donc l'ensemble :

$$\boxed{J_q = Vect(1-X^2, X+X^2) \ \cup \ Vect(1-X^2, X-X^2)}$$

3. **Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(0) = 0\}$.**

(a) **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de F.**
On sait que $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$: $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, avec $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(0) = 0 \\ &\iff a_0 + a_1.0 + a_2.0 = 0 \\ &\iff a_0 = 0 \\ &\iff P = a_1X + a_2X^2 \in Vect(X, X^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F = Vect(X, X^2)}$$

Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, comme (X, X^2) est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$, c'est bien une base de F.

(b) **Déterminons l'orthogonal de F relativement à φ.**
On cherche donc $F^\perp = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \forall Q \in F, \varphi(P,Q) = 0\}$.

Soit $P \in F^\perp$. On doit donc avoir $\varphi(P, X) = \varphi(P, X^2) = 0$.
Avec l'expression de φ, ces égalités s'écrivent :

$$\begin{cases} P(1).(-1) + P(-1).1 &= 0 \\ P(1).(-1)^2 + P(-1).1^2 &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne plus précisément :

$$\begin{cases} P(-1) - P(1) &= 0 \\ P(-1) + P(1) &= 0 \end{cases}$$

D'où $P(-1) = P(1) = 0$.

Le polynôme P admet donc au moins deux racines : -1 et 1.
Or $P \in \mathbb{R}_2[X]$: P s'écrit ainsi $P(X) = a(X-1)(X+1) = a(X^2-1)$.
On a donc :

$$\boxed{F^\perp = Vect(X^2 - 1)}$$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}$ une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + a\,x_4^2 + 2x_1x_2 + 4b\,x_1x_3 + 4b\,x_2x_3 + 2c\,x_2x_4$$

où (x_1, x_2, x_3, x_4) sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

1. **Déterminons la forme polaire de q ainsi que la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.**

   Notons φ la forme polaire de q. Soient x et y des vecteurs de E. Les relations entre φ et q sont :

   $$\boxed{q(x) = \varphi(x, x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}}$$

   Pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, on a donc

   $$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + a\,x_4y_4 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2b\,x_1y_3 + 2b\,y_1x_3 + 2b\,x_2y_3 + 2b\,y_2x_3 + c\,x_2y_4 + c\,y_2x_4$$

   La matrice de q (ou de φ) est donc :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2b & 0 \\ 1 & 2 & 2b & c \\ 2b & 2b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & a \end{pmatrix}$$

2. **Donnons une réduction en carrés de Gauss de la forme quadratique q.**

   $$\begin{aligned}
   q(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + a\,x_4^2 + 2x_1x_2 + 4b\,x_1x_3 + 4b\,x_2x_3 + 2c\,x_2x_4 \\
   &= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2bx_3)\right] + 2x_2^2 + x_3^2 + a\,x_4^2 + 4b\,x_2x_3 + 2c\,x_2x_4 \\
   &= \left[(x_1 + x_2 + 2bx_3)^2 - x_2^2 - 4b^2x_3^2 - 4bx_2x_3\right] + 2x_2^2 + x_3^2 + a\,x_4^2 + 4b\,x_2x_3 + 2c\,x_2x_4 \\
   &= (x_1 + x_2 + 2bx_3)^2 + x_2^2 - 4b^2x_3^2 + x_3^2 + ax_4^2 + 2cx_2x_4 \\
   &= (x_1 + x_2 + 2bx_3)^2 + \left[x_2^2 + 2x_2(cx_4)\right] + x_3^2(1 - 4b^2) + ax_4^2 \\
   &= (x_1 + x_2 + 2bx_3)^2 + \left[(x_2 + cx_4)^2 - c^2x_4^2\right] + +x_3^2(1 - 4b^2) + ax_4^2 \\
   &= \boxed{(x_1 + x_2 + 2bx_3)^2 + (x_2 + cx_4)^2 + (1 - 4b^2)x_3^2 + (a - c^2)x_4^2}
   \end{aligned}$$

3. **Déterminons le rang et la signature de q en fonction des paramètres réels a, b et c.**

   Si $a - c^2 > 0$,

   si $1 - 4b^2 > 0$, alors $rg(q) = 4$ et $sgn(q) = (4, 0)$
   si $1 - 4b^2 = 0$, alors $rg(q) = 3$ et $sgn(q) = (3, 0)$
   si $1 - 4b^2 < 0$, alors $rg(q) = 4$ et $sgn(q) = (3, 1)$

   Si $a - c^2 = 0$,

   si $1 - 4b^2 > 0$, alors $rg(q) = 3$ et $sgn(q) = (3, 0)$
   si $1 - 4b^2 = 0$, alors $rg(q) = 2$ et $sgn(q) = (2, 0)$
   si $1 - 4b^2 < 0$, alors $rg(q) = 3$ et $sgn(q) = (2, 1)$

   Si $a - c^2 < 0$,

   si $1 - 4b^2 > 0$, alors $rg(q) = 4$ et $sgn(q) = (3, 1)$
   si $1 - 4b^2 = 0$, alors $rg(q) = 3$ et $sgn(q) = (2, 1)$
   si $1 - 4b^2 < 0$, alors $rg(q) = 4$ et $sgn(q) = (2, 2)$

Précisons enfin une base de E qui soit orthogonale pour q.
On suppose ici que $(a,b,c)=(2,0,1)$.
On a alors $1-4b^2=1>0$ et $a-c^2=2-1>0$.
On est dans le cas où $rg(q)=1$ et $sgn(q)=(4,0)$.

On pose $\left|\begin{array}{lcl} X = & x_1+x_2+2b\,x_3 & =x_1+x_2 \\ \\ Y = & x_2+cx_4 & =x_2+x_4 \\ \\ Z = & \sqrt{1-4b^2}\;x_3 & =x_3 \\ \\ T = & \sqrt{a-c^2}\;x_4 & =x_4 \end{array}\right.$

On inverse ce système : $\left|\begin{array}{ll} x_1 = & X-Y+T \\ \\ x_2 = & Y-T \\ \\ x_3 = & Z \\ \\ x_4 = & T \end{array}\right.$

On pose alors la matrice de passage P telle que $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X\\ Y\\ Z\\ T\end{pmatrix}$:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On définit donc la base orthogonale (v_1,v_2,v_3,v_4) pour q par :

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad,\quad v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$