Devoir 3 pour le 14 Mai

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Préciser et justifier (sans calculs) le rang et la signature de la forme quadratique associée à φ.
3. Soit $F = \{P \in E \ / \ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.
4. Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale de F relativement au produit scalaire φ.
5. Déterminer la dimension et une base de $F^{\perp}$.

Exercice 2

Dans E euclidien, on note $< x|y >$ le produit scalaire de E.
Soit f un endomorphisme non nul de E. On suppose que f est *antisymétrique*, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad < f(x)|y >= - < x|f(y) >$$

1. (a) Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$ et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $< f(x)|x >= 0$.
   (b) En déduire que s'il existe une valeur propre réelle de f, elle est nulle.

3. On suppose dans cette question que E de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E. Démontrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q \\ p & 0 & -r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$$

   Indication : on pourra comparer $< f(e_i)|e_j >$ et $< f(e_j)|e_i >$ pour tout $i \neq j$.

4. (a) Montrer que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Montrer que toute valeur propre de $f \circ f$ est négative ou nulle.
   (c) Pourquoi l'endomorphisme $f \circ f$ admet-il au moins une valeur propre non nulle ? Justifier votre réponse.
   (d) Soit u un vecteur propre de $f \circ f$ associé à une valeur propre λ. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.