Devoir 3 pour le 14 Mai

Corrigé

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. **Montrons que φ est un produit scalaire.**
   - φ est une forme bilinéaire symétrique (d'après l'énoncé, mais facilement vérifiable)
   - φ est positive ?
     Soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$. On a : $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$.
     Donc φ est bien positive.
   - φ est définie ?
     Soit $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P, P) = 0$, on a alors $P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$, autrement dit $P(0) = P(1) = P(2) = 0$.
     P est donc un polynôme de degré ≤ 2, qui a au moins 3 racines réelles : c'est le polynôme nul. φ est donc bien définie.

   φ est ainsi une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. **Précisons (sans calculs) le rang et la signature de la forme quadratique associée à φ.**
   Soit q la forme quadratique associée à φ. Considérons la réduction de Gauss de q en sommes (et différences) de carrés de formes linéaires indépendantes.
   On sait que q est définie positive. On en déduit donc que les carrés présents dans la décomposition sont, d'une part tous positifs, et d'autre part en nombre égal à la dimension de l'espace E.

   $$\boxed{rg(q) = 3} \qquad \boxed{sgn(q) = (3, 0)}$$

3. **Soit $F = \{P \in E \ / \ P(0) = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.**
   Posons $P \in E = \mathbb{R}_2[X]$. Alors il existe trois réels a_0, a_1, a_2 tels que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$.

   $$P \in F \iff P(0) = 0 \iff a_0 + a_1.0 + a_2.0 = 0 \iff a_0 = 0 \iff P = a_1X + a_2X^2 \iff P \in Vect(X, X^2)$$

   On a donc $F = Vect(X, X^2)$. Or la famille (X, X^2) est libre car ce sont des polynômes à degrés étagés. La famille (X, X^2) est donc une base de F.

4. **Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale de F relativement au produit scalaire φ.**

   On part de la base (X, X^2) de F.

   On pose donc $P_1 = \dfrac{X}{\|X\|}$.
   Ici $\varphi(X, X) = 0.0 + 1.1 + 2.2 = 5$. Donc $\|X\| = \sqrt{\varphi(X, X)} = \sqrt{5}$.

   $$\boxed{P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}X}$$

On pose alors $P_2' = X^2 - \varphi(X^2, P_1)P_1$.

$$\varphi(X^2, P_1) = \varphi\left(X^2, \frac{1}{\sqrt{5}}X\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi(X^2, X) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0.0 + 1.1 + 2^2.2\right) = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

On a donc $P_2' = X^2 - \frac{9}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}}X = X^2 - \frac{9}{5}X$. Il reste donc à normer P_2'.

$$\varphi(P_2', P_2') = 0 + \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{9}{5}.2\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \|P_2'\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(X^2 - \frac{1}{5}X\right)}$$

Les vecteurs P_1 et P_2 obtenus forment alors une base orthonormale de F pour le produit scalaire φ.

5. **Déterminer la dimension et une base de $F^\perp$.**
On sait que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ donc ici $\dim(F^\perp) = 3 - 2 = 1$.

$$\boxed{\dim(F^\perp) = 1}$$

On cherche donc un polynôme P, de degré ≤ 2, qui soit orthogonal à la fois à X et à X^2.

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(P, X) = 0 \\ \varphi(P, X^2) = 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 + P(1) + 2P(2) = 0 \\ 0 + P(1) + 4P(2) = 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{array}\right.$$

Le polynôme P cherché est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et qui admet (au moins) comme racines 1 et 2. On a ainsi :

$$\boxed{F^\perp = Vect\left((X-1)(X-2)\right)}$$

Exercice 2

Dans E euclidien, on note $< x|y >$ le produit scalaire de E.
On dit qu'un endomorphisme f de E est *antisymétrique* si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \qquad < f(x)|y > = - < x|f(y) >$$

1. (a) **Montrons que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$.**
Soient $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Autrement dit, $f(y) = 0$ et $\exists z \in E \ / \ x = f(z)$.

$$< x|y > = < f(z)|y > = - < z|f(y) > = - < z|0 > = 0$$

On a ainsi montré que n'importe quel élément de $\mathrm{Im}(f)$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) \ \subset (\mathrm{Ker}(f))^\perp$$

De plus, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$ d'après le théorème du rang.
Egalement, $\dim\left((\mathrm{Ker}(f))^\perp\right) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$ d'après le fait que $\mathrm{Ker}(f)$ et $(\mathrm{Ker}(f))^\perp$ sont supplémentaires.
Ainsi, on a $\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Im}(f) & \subset (\mathrm{Ker}(f))^\perp \\ \dim(\mathrm{Im}(f)) & = \dim(\mathrm{Ker}(f))^\perp \end{array}\right.$. D'où l'égalité cherchée :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp}$$

(b) **En déduire que $E = \mathbf{Im}(f) + \mathbf{Ker}(f)$.**

On a montré précédemment que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$. On a donc ainsi $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
En effet, si $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, on a $< x|x >= 0$ car le premier x appartient à $\mathrm{Im}(f)$, et le deuxième x appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. Or le produit scalaire est défini positif, on en déduit que $x = 0$.

On a toujours $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$ car $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sev de E.
Ici, $\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$ d'après le théorème du rang.
D'où l'égalité cherchée :

$$\boxed{E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)}$$

(Remarque : la somme est même directe ici)

Montrons que $\mathbf{Ker}(f) = \mathbf{Ker}(f^2)$

$\boxed{\subset}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire tel que $f(x) = 0$.
Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$.

$\boxed{\supset}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, c'est-à-dire tel que $f^2(x) = 0$.
Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. D'où $f(x) = 0$: $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$$

2. (a) **Montrer que pour tout $x \in E$, on a $< f(x)|x >= 0$.**

En effet, pour tout $x \in E$, $< f(x)|x >= - < x|f(x) >= - < f(x)|x >$, vu la symétrie du produit scalaire et l'antisymétrie de f.
Donc :

$$\boxed{\forall x \in E, < f(x)|x >= 0}$$

(b) **En déduire que s'il existe une valeur propre réelle de f, elle est nulle.**

Supposons que λ soit une valeur propre réelle de f.
Cela signifie donc qu'il existe un vecteur x non nul, tel que $f(x) = \lambda x$.
La condition précédente nous donne alors que :

$$0 =< f(x)|x >=< \lambda x|x >= \lambda < x|x >= \lambda \|x\|^2$$

Comme x est non nul, on a $\|x\| \neq 0$, d'où nécessairement $\lambda = 0$.

$$Sp(f) = \{0\}$$

3. **On suppose dans cette question que E de dimension 3 et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E. Démontrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q \\ p & 0 & -r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$$

– Posons $f(e_1) = me_1 + pe_2 + qe_3$ (En effet, (e_1, e_2, e_3) est une base de E).
Alors :

$$< f(e_1)|e_1 >= m \quad , \quad < f(e_1)|e_2 >= p \quad , \quad < f(e_1)|e_3 >= q$$

Or, on a vu que $< f(e_1)|e_1 >= 0$, donc $\boxed{m = 0}$.
Cela justifie donc l'écriture de la première colonne de la matrice A.

– Posons $f(e_2) = ae_1 + be_2 + ce_3$. Alors :

$$< f(e_2)|e_1 >= a \quad , \quad < f(e_2)|e_2 >= b \quad , \quad < f(e_2)|e_3 >= c$$

Or, on a vu que $< f(e_2)|e_2 >= 0$, donc $\boxed{b = 0}$.
De plus, $a =< f(e_2)|e_1 >= - < e_2|f(e_1) >= -p$. Donc $\boxed{a = -p}$
Posons alors $\boxed{r = c}$.

– $f(e_3) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ Alors :

$$< f(e_3)|e_1 >= x \quad , \quad < f(e_3)|e_2 >= y \quad , \quad < f(e_3)|e_3 >= z$$

Or, on a vu que $< f(e_3)|e_3 >= 0$, donc $\boxed{z = 0}$.
De plus, $x =< f(e_3)|e_1 >= - < e_3|f(e_1) >= -q$. Donc $\boxed{x = -q}$.
De même, $y =< f(e_3)|e_2 >= - < e_3|f(e_2) >= -r$. Donc $\boxed{y = -r}$.

L'écriture de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q \\ p & 0 & -r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) **Montrer que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E.**
Soient $x, y \in E$. Il faut donc vérifier que $< f \circ f(x)|y >=< x|f \circ f(y) >$.

$$< f \circ f(x)|y >= - < f(x)|f(y) >= -(- < x|f \circ f(y) >) =< x|f \circ f(y) >$$

Donc $f \circ f$ est bien un endomorphisme symétrique de E.

(b) **Montrer que toute valeur propre de $f \circ f$ est négative ou nulle.**
Soit λ une valeur propre de $f \circ f$: il existe donc x un vecteur non nul tel que $f \circ f(x) = \lambda x$.
On a donc :

$$< x|f \circ f(x) >= \begin{cases} < x\ lambdax >= \lambda \|x\|^2 \\ \\ - < f(x)|f(x) >= -\|f(x)\|^2 \end{cases}$$

On a ainsi $\lambda \|x\|^2 \leq 0$, autrement dit $\lambda \leq 0$.

$$\boxed{Sp(f \circ f) \subset \mathbb{R}^-}$$

(c) **Pourquoi l'endomorphisme $f \circ f$ admet-il au moins une valeur propre non nulle ?**
$f \circ f$ étant un endomorphisme symétrique, f est en particulier diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}_0$ dans laquelle la matrice de $f \circ f$ soit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $f \circ f$.
Si les valeurs propres étaient toutes nulles, alors la matrice D serait la matrice nulle, et l'endomorphisme $f \circ f$ serait nul. Or f est supposé non nul , donc $f \circ f$ également. Ce cas est donc impossible. Il existe donc nécessairement au moins une valeur propre non nulle.

(d) **Soit u un vecteur propre de $f \circ f$ associé à une valeur propre λ. Montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.**

Soit u un vecteur propre de $f \circ f$. u est donc un vecteur non nul, tel que $f \circ f(u) = \lambda u$.
Or, comme f est antisymétrique, la question (2) a. nous donne que :

$$< u|f(u) >= 0$$

On a donc que les vecteurs u et $f(u)$ sont orthogonaux, et comme u est non nul, la famille $(u, f(u))$ est bien libre.