Université Claude Bernard Lyon 1

Licence MASS - UE 41

Épreuve d'Algèbre

Première session de JUIN 2008 Vendredi 6 juin 2008 - Durée : 2 heures

---

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

1. Qu'est-ce qu'un endomorphisme nilpotent ; énoncer la caractérisation au moyen du polynôme caractéristique et également au moyen du polynôme minimal. La Prouver.
2. Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
   Si $f^2 - f - 3.1_E = 0$, quelles peuvent être les valeurs propres de f ?
3. Rappeler la définition d'une matrice S réelle symétrique définie et positive.
   Supposant S symétrique, montrer que S est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne, calculer la distance du point $a := (2, 1, -5)$ au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 1 *Soit* $A := \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.*
2. *Déterminer une réduite de Jordan de A en précisant la base et la matrice de passage.*
3. *Calculer le polynôme minimal de A.*
4. *Déterminer A^{-1}.*

Exercice 2 *Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :*

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_4 + 6x_3x_4.$$

1. *Pourquoi q est-elle une forme quadratique ?*
2. *Quelle est sa forme polaire φ ? Quelle est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?*
3. *Déterminer la décomposition de Gauss de q en sommes et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.*
4. *Déterminer la signature et le rang de q.*
5. *Déterminer une base q-orthogonale.*

Exercice 3 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans une base orthonormée par la matrice* $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que A est une matrice orthogonale.*
2. *Déterminer f et préciser ses éléments caractéristiques.*