Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Examen - 06/06/08

(Corrigé)

Questions de cours

1. **Qu'est-ce qu'un endomorphisme nilpotent ? énoncer la caractérisation au moyen du polynôme caractéristique et également au moyen du polynôme minimal. La prouver.**

   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit **nilpotent** si et seulement si il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$.

   Supposons que f soit nilpotent. Alors $\exists n_0 \geq 1$ tel que $f^{n_0} = 0$. Le polynôme X^{n_0} est donc un polynôme annulateur de f. Les valeurs propres de f sont donc nécessairement nulles (elles sont parmi les racines de tout polynôme annulateur).
   Ainsi, le polynôme minimal est donc de la forme $\mu(X) = X^k$, $k \geq 1$.
   Le polynôme caractéristique, quant-à-lui, est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$, dont les racines sont les valeurs propres. Il est donc égal à $\chi(X) = (-1)^n X^n$.

   Réciproquement, si le polynôme minimal est de la forme $\mu(X) = X^k$, pour un certain $k \geq 1$, en particulier c'est un polynôme annulateur de f et on a $f^k = 0$. f est donc nilpotent.
   De même, si le polynôme caractéristique est égal à $(-1)^n X^n$, le théorème de Cayley-Hamilton affirme que c'est un polynôme annulateur de f. On a ainsi $(-1)^n f^n = 0$, d'où f nilpotent.
   On a donc montré que :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ nilpotent} & \iff & \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \mu_f(X) = X^k \\ & \iff & \chi_f(X) = (-1)^n X^n \end{array}}$$

2. **Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.**
   Si $f^2 - f - 3Id_E = 0$, quelles peuvent être les valeurs propres de f ?

   On sait que les valeurs propres de f sont parmi les racines de n'importe quel polynôme annulateur de f. Les racines de $X^2 - X - 3$ sont $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. Ce sont donc les seules possibilités pour les valeurs propres de f.

3. **Rappeler la définition d'une matrice S réelle symétrique définie et positive.**

   Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. La matrice S est **symétrique** si et seulement si ${}^tS = S$.

   De plus, si S est symétrique, S est dite **définie positive** si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left({}^tXSX = 0 \ \Rightarrow\ X = 0 \right)$$

   De manière équivalente, la matrice S est dite **définie positive** si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\},\ \ {}^tXSX > 0$$

Supposant S symétrique, montrer que S est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Supposons que la matrice S soit positive. Soit $\lambda \in Sp(S)$ une valeur propre de S.
Alors il existe un vecteur X non nul, tel que $SX = \lambda X$.
Donc ${}^tXSX = {}^tX(SX) = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$.
Donc on a nécessairement $\lambda \geq 0$. Ainsi toutes les valeurs propres de S sont positives.

Réciproquement, soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives.
S étant symétrique, elle est diagonalisable (dans une base orthonormale) :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \ / \ S = {}^tPDP$$

où D désigne une matrice diagonale réelle : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si on note $Y = PX$:

$${}^tXSX = {}^tX({}^tPDP)X = {}^t(PX)D(PX) = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

puisque tous les λ_i sont positifs.
La matrice S est donc bien positive.

4. **Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne, calculer la distance du point $a = (2,1,5)$ au plan P d'équation $x + y + z = 0$.**

Soit x le vecteur canonique associé au point a : $x = (2,1,5)$.
On sait que $d(x,P) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ désigne la projection orthogonale de x sur P.
Cherchons donc une base orthonormale du plan P.

On a $P = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Ces vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normer : on pose

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p(x) &= <x|u_1> u_1 + <x|u_2> u_2 \\ &= \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-5}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-7}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$d(x,P) = \|x - p(x)\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3}\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$**.**

1. **Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.**
   Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(X) = \det(A - XI_3) & = & \begin{vmatrix} 8-X & -1 & -5 \\ -2 & 3-X & 1 \\ 4 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \\ & = & \begin{vmatrix} 2-X & -1 & -5 \\ 2-X & 3-X & 1 \\ 2-X & -1 & -1-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ & = & (2-X) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4-X & 6 \\ 0 & 0 & 4-X \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ & = & (2-X)(4-X)^2 \end{array}$$

Les valeurs propres de A étant les racines du polynôme caractéristique : on en déduit que

$$\boxed{Sp(A) = \{2, 4\}}$$

Calculons les espaces propres associés.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in E_2 \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

On a donc

$$\boxed{E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$X \in E_4 \iff (A - 4I_3)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - 5z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \end{array} \right.$$

On a donc

$$\boxed{E_4 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Comme la multiplicité de 4 en tant que racine de χ_A est 2 et on a $\dim(E_4) = 1 \neq 2$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. **Déterminer une réduite de Jordan de A en précisant la base et la matrice de passage.**

Comme la valeur propre 2 est simple, la réduite de Jordan ne contient qu'un bloc pour la valeur propre 2 qui sera de taille 1. Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fournira donc une base du sous-espace correspondant.

Comme $\dim(E_4) = 1$, la réduite de Jordan ne contient qu'un seul bloc pour la valeur propre 4 (qui sera donc en principe de taille 2).
Posons $M = A - 4I$. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a clairement que $rg(M^2) = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M^2)) = 2$, qui est donc égal à la multiplicité de 4 dans le polynôme caractéristique : le plus grand bloc de Jordan est donc bien de taille 2.

On cherche donc $v_2 \in \mathrm{Ker}(M^2) \setminus \mathrm{Ker}(M)$. Le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

On pose ensuite $v_1 = Mv_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a ainsi la réduite de Jordan de la matrice A dans la base (u, v_1, v_2) :

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

La matrice de passage P est donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. **Calculer le polynôme minimal de A**

On peut lire le polynôme minimal de A sur la réduite de Jordan : on a : $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres (distinctes) de A, et α_i est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i. On a ainsi :

$$\boxed{\mu_A(X) = (X - 2)(X - 4)^2}$$

4. **Déterminer A^{-1}**

On sait que le polynôme minimal est un polynôme annulateur de A :

$$\mu_A(X) = (A - 2I_3)(A^2 - 8A + 16I_3) = A^3 - 10A^2 + 32A - 32I_3 = 0$$

On en déduit donc que $A(A^2 - 10A + 32I_3) = 32I_3$. Donc la matrice A est bien inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^2 - 10A + 32I_3\right)}$$

Exercice 2

Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_4 + 6x_3x_4$$

1. **Pourquoi q est-elle une forme quadratique ?**
   q est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3, x_4. C'est donc une forme quadratique.

2. **Quelle est sa forme polaire φ ? Quelle est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?**
   On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$. On obtient :

   $$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 - 3x_3y_3 - \frac{1}{4}x_4y_4 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_4 + \frac{1}{2}x_4y_2 + 3x_3y_4 + 3x_4y_3$$

   La matrice correspondante dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc :

   $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1/2 & 3 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

3. **Déterminer la décomposition de Gauss de q en sommes et différences de carrés de formes linéaires indépendantes.**

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_4 + 6x_3x_4 \\
&= \left[(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3\right] + 3x_2^2 - 3x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + x_2x_4 + 6x_3x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + 4x_2x_3 + x_2x_4 + 6x_3x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + \left[-(x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4)^2 + 4x_3^2 + \frac{1}{4}x_4^2 + 2x_3x_4\right] - 4x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + 6x_3x_4 \\
&= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4)^2 + 8x_3x_4 \\
&= \boxed{(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4)^2 + 2(x_3 + x_4)^2 - 2(x_3 - x_4)^2}
\end{aligned}$$

4. **Déterminer la signature et le rang de q.**

   La décomposition de Gauss de q comporte 4 carrés non nuls, on a donc

   $$\boxed{rg(q) = 4}$$

   De plus, il y a 2 carrés (non nuls) positifs et 2 carrés (non nuls) négatifs :

   $$\boxed{sgn(q) = (2, 2)}$$

5. **Déterminer une base q-orthogonale.**

On pose : $X = x_1 - 2x_2 + x_3, \;\; Y = x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4, \;\; Z = x_3 + x_4, \;\; T = x_3 - x_4.$

Inversons ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & X + 2x_2 - x_3 \\ x_2 & = & Y + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 & = & \frac{1}{2}(Z+T) \\ x_4 & = & \frac{1}{2}(Z-T) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & X + 2Y + 2Z + T \\ x_2 & = & Y + \frac{5}{4}Z + \frac{3}{4}T \\ x_3 & = & \frac{1}{2}(Z+T) \\ x_4 & = & \frac{1}{2}(Z-T) \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ forment donc une base q-orthogonale, dans laquelle la forme quadratique s'écrit :

$$q(X,Y,Z,T) = X^2 - Y^2 + 2Z^2 - 2T^2$$

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans une base orthonormée par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Vérifier que A est une matrice orthogonale**

Vérifions que les vecteurs-colonnes de la matrice A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$< C_1 \,|\, C_2 >= 2 + 2 - 4 = 0$$
$$< C_1 \,|\, C_3 >= 2 - 4 + 2 = 0$$
$$< C_2 \,|\, C_3 >= 4 - 2 - 2 = 0$$
$$\|C_1\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1 = \|C_2\| = \|C_3\|$$

La matrice A est bien orthogonale.

2. **Déterminer f et préciser ses éléments caractéristiques.**

Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$AX = X \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 2z & = & 3x \\ 2x + y - 2z & = & 3y \\ 2x - 2y + z & = & 3z \end{array}\right. \Longleftrightarrow x - y - z = 0 \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a donc $E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ qui est de dimension 2 : c'est un plan vectoriel.

L'endomorphisme f est donc la symétrie orthogonale par rapport au plan E_1.