

UE 41 - Epreuve d'Algèbre

Examen 2ème session - Durée 1h30
Mercredi 25 Juin 2008

L'usage de toute calculatrice est interdit. Aucun document personnel n'est autorisé.

Questions de cours

1. Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique $(X - 1)^4(X + 2)^2$ et même polynôme minimal $(X - 1)^2(X + 2)$.
Justifier la raison pour laquelle vos deux matrices ne sont pas semblables.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On suppose qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^4 = f^2$ et admet 1 et -1 parmi ses valeurs propres.
Montrer que f est diagonalisable.
3. Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique dans un espace euclidien.
Soit f un tel endomorphisme :
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$.
 - (b) Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.
4. Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$. Soit $X = (-3, 1, -1)$.
 - (a) Déterminer une base orthonormée de F .
 - (b) Déterminer $p_F(X)$ la projection orthogonale du vecteur X sur F
 - (c) Déterminer $s_F(X)$ le symétrique orthogonal du vecteur X par rapport à F .
 - (d) Déterminer $d(X, F)$ la distance du vecteur X à F .

Exercice 1

Soit $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + x_3x_4$$

1. Pourquoi q est une forme quadratique ?
2. Quelle est sa forme polaire φ ? Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ? Cette matrice est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer la décomposition de Gauss de q en sommes et différences de formes linéaires indépendantes.
4. Déterminer la signature et le rang de q .
5. Déterminer une base qui soit q -orthogonale.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique par la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale.
2. Déterminer f et préciser ses éléments caractéristiques.