Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Examen - 25/06/08

(Corrigé)

Questions de cours

1. **Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique $(X-1)^4(X+2)^2$ et même polynôme minimal $(X-1)^2(X+2)$. Justifier la raison pour laquelle vos deux matrices ne sont pas semblables.**

   Il suffit de construire deux matrices, sous leur forme de Jordan, qui vérifient les deux conditions pour les polynômes, et qui soient différentes. En effet, on sait que deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même réduite de Jordan.

   Le polynôme caractéristique égal à $(X-1)^4(X+2)^2$ nous indique que la diagonale de la matrice de Jordan doit contenir quatre 1 et deux -2.
   Par ailleurs, on sait que le polynôme minimal s'écrit $\prod(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où λ_i sont les valeurs propres de la matrice, et α_i est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i.
   Ici, on a donc que : le plus grand bloc de Jordan associé à la v.p. 1 est de taille 2, et le plus grand bloc de Jordan associé à la v.p. -2 est de taille 1.

   Deux matrices répondant au problème sont donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Les blocs pour la v.p. -2 sont déjà déterminés car ils doivent être de taille 1. Les blocs de la v.p. 1 sont de taille inférieure à 1 : on a donc soit des blocs de tailles $2, 1, 1$, soit des blocs de taille $2, 2$.

2. **Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On suppose qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^4 = f^2$ et admet 1 et -1 parmi ses valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.**

   On sait que $f^4 = f^2$ donc le polynôme $P(X) = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de f. Le polynôme minimal de f, noté π_f divise donc ce polynôme P et a parmi ses racines au moins -1 et 1 :

$$\pi_f(X) = (X-1)(X+1)Q(X) \quad \text{avec} \quad Q(X) = 1 \text{ ou } X \text{ ou } X^2$$

   1er cas : $Q(X) = 1$. Alors $\pi_f(X) = (X-1)(X+1)$. Le polynôme minimal étant scindé simple, f est alors diagonalisable.

   2ème cas : $Q(X) = X$. Alors $\pi_f(X) = X(X-1)(X+1)$. Le polynôme minimal étant encore scindé simple, f est alors diagonalisable.

   3ème cas : $Q(X) = X^2$. Alors $\pi_f(X) = X^2(X-1)(X+1)$: π_f est de degré 4. Mais, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal doit diviser le polynôme caractéristique qui est ici de degré 3 (l'espace considéré est de dimension 3). Ce cas est donc impossible.

   Finalement, f est bien diagonalisable.

3. **Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique dans un espace euclidien.**

   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit **symétrique** si et seulement si :

   $$\forall x, y \in E, \quad < f(x) \,|\, y > = < x \,|\, f(y) >$$

   Soit f un tel endomorphisme :

   (a) **Montrer que $\mathbf{Ker}(f) = (\mathbf{Im}(f))^{\perp}$.**

   Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $< x|y >= 0$.
   $x \in \mathrm{Ker}(f)$: on a donc $f(x) = 0$.
   $y \in \mathrm{Im}(f)$: il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$.

   Alors :

   $$< x|y >=< x|f(z) >=< f(x)|z >=< 0|z >= 0$$

   On a donc montré que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}(f))^{\perp}}$.

   De plus, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f) = \dim\,(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.
   On en déduit donc que

   $$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}}$$

   (b) **Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.**

   Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Montrons que E_λ et E_μ sont orthogonaux.

   Soit $x \in E_\lambda$: on a donc $f(x) = \lambda x$.
   Soit $y \in E_\mu$: on a donc $f(y) = \mu y$.
   Alors :

   $$< f(x)|y >=< x|f(y) > \quad \Longrightarrow \quad < \lambda x|y >=< x|\mu y > \quad \Longrightarrow \quad \lambda < x|y >= \mu < x|y >$$

   On a donc $(\lambda - \mu) < x|y >= 0$, d'où $< x|y >= 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

4. **Soit $F = Vect((1, 1, 1), (1, 0, -1))$. Soit $X = (-3, 1, -1)$.**

   (a) **Déterminer une base orthonormée de F.**

   Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont déjà orthogonaux. Il suffit donc de les normer. On pose donc :

   $$\boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad , \quad \boxed{u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

   et la famille (u_1, u_2) est donc une base orthonormale de F.

(b) **Déterminer $p_F(X)$ la projection orthogonale du vecteur X sur F**

On applique la formule qui donne la projection orthogonale sur un espace dont on connaît une base orthonormale :

$$\begin{aligned} p_F(X) &= < x|u_1 > u_1 + < x|u_2 > u_2 \\ &= \frac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(c) **Déterminer $s_F(X)$ le symétrique orthogonal du vecteur X par rapport à F.**

On sait que pour tout $x \in E$, $s_F(X) = 2p_F(X) - X$. On a donc :

$$s_F(X) = 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(d) **Déterminer $d(X, F)$ la distance du vecteur X à F.**

On sait que la distance de X à F est égale à la norme du vecteur $X - p_F(X)$.

$$d(X, F) = \|X - p_F(X)\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{\sqrt{6}}$$

Exercice 1

Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + x_3x_4$$

1. **Pourquoi q est-elle une forme quadratique ?**

   q est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3, x_4. C'est donc une forme quadratique.

2. **Quelle est sa forme polaire φ ? Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ?**

   On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$. On obtient :

   $$\varphi(x, y) = 4x_1y_1 - 4x_2y_2 - 8x_1y_3 - 8x_3y_1 + 8x_2y_3 + 8x_3y_2 + \frac{1}{2}x_3y_4 + \frac{1}{2}x_4y_3$$

   La matrice correspondante dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc :

   $$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

   Cette matrice est-elle diagonalisable ?

   La matrice de φ est réelle et symétrique. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale.

3. **Déterminer la décomposition de Gauss de q en sommes et différences de formes linéaires indépendantes.**

$$\begin{aligned}
q(x) &= 4x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + x_3x_4 \\
&= \left[(2x_1 - 4x_3)^2 - 16x_3^2\right] - 4x_2^2 + 16x_2x_3 + x_3x_4 \\
&= (2x_1 - 4x_3)^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2 + 16x_2x_3 + x_3x_4 \\
&= (2x_1 - 4x_3)^2 - (2x_2 - 4x_3)^2 + x_3x_4 \\
&= \boxed{(2x_1 - 4x_3)^2 - (2x_2 - 4x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_3 - x_4)^2}
\end{aligned}$$

4. **Déterminer la signature et le rang de q.** La décomposition de Gauss de q comporte 4 carrés non nuls, on a donc

$$\boxed{rg(q) = 4}$$

De plus, il y a 2 carrés (non nuls) positifs et 2 carrés (non nuls) négatifs :

$$\boxed{sgn(q) = (2, 2)}$$

5. **Déterminer une base qui soit q-orthogonale.**
On pose : $X = x_1 - 2x_3,\ \ Y = x_2 - 2x_3,\ \ Z = x_3 + x_4,\ \ T = x_3 - x_4.$
Inversons ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& X + 2x_3 \\ x_2 &=& Y + 2x_3 \\ x_3 &=& \frac{1}{2}(Z+T) \\ x_4 &=& \frac{1}{2}(Z-T) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& X + Z + T \\ x_2 &=& Y + Z - T \\ x_3 &=& \frac{1}{2}(Z+T) \\ x_4 &=& \frac{1}{2}(Z-T) \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ forment donc une base q-orthogonale, dans laquelle la forme quadratique s'écrit :

$$q(X, Y, Z, T) = 4X^2 - 4Y^2 + \frac{1}{4}Z^2 - \frac{1}{4}T^2$$

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **Vérifier que A est une matrice orthogonale.**
Vérifions que les vecteurs-colonnes de la matrice A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$< C_1 \,|\, C_2 >= -2 - 2 + 4 = 0$$

$$< C_1 \,|\, C_3 >= 2 - 4 + 2 = 0$$

$$< C_2 \,|\, C_3 >= -4 + 2 + 2 = 0$$

$$\|C_1\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1 = \|C_2\| = \|C_3\|$$

La matrice A est bien orthogonale.

2. **Déterminer f et préciser ses éléments caractéristiques.**
Cherchons le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y-2z & = & 3x \\ 2x-y-2z & = & 3y \\ -2x-2y-z & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 0 \\ x-2y-z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=-z \end{array}\right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

On a donc $\boxed{E_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ qui est de dimension 1 : c'est une droite vectorielle.

L'endomorphisme f est donc une <u>rotation</u> autour de la droite E_1.
On sait que l'angle θ de cette rotation est défini (au signe près) par la relation :

$$2\cos\theta + 1 = tr(A)$$

Ici, $tr(A) = -1$. On a donc $\cos\theta = -1$, autrement dit : $\boxed{\theta = \pi}$.

f est donc la rotation vetorielle d'angle π autour de la droite $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.