Exercices pour le 27 Février

Exercice 1

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et soient $u = (-1, 0, 1)$, $v = (-3, 2, 0)$ et $w = (0, 1, 0)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.
2. Vérifier que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas inversible.
2. Déterminer les noyaux des $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ pour les λ obtenus.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est simple.