Exercices pour le 27 Février

Corrigé

Exercice 1

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et soient $u = (-1, 0, 1)$, $v = (-3, 2, 0)$ et $w = (0, 1, 0)$.

1. **Montrons que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**

   Montrons donc que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{R}^3$.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

   Autrement dit, dans la base canonique, on a :

   $$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \quad & \Rightarrow \quad \lambda_1(-1,0,1) + \lambda_2(-3,2,0) + \lambda_3(0,1,0) = 0 \\ & \Rightarrow \quad (-\lambda_1 - 3\lambda_2 \,,\, 2\lambda_2 + \lambda_3 \,,\, \lambda_1) = 0 \\ & \Rightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   D'où on a bien $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   La famille (u, v, w) est donc bien libre dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Déterminons la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

   Cette matrice décrit donc en colonnes les vecteurs u, v, w dans la base canonique :

   $$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Vérifions que P est inversible et calculons P^{-1}.**

   Pour savoir si P est inversible, le plus simple est de calculer $\det(P)$:

   $$\det(P) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 0 - 0 - 0 - 0 = -3$$

   On a donc bien $\det(P) = -3 \neq 0$, donc la matrice P est bien inversible. On a alors, la formule

   $$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\, {}^t com(P) = -\frac{1}{3}\; {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Calcul de $P^{-1}AP$.**

   Un produit de matrices donne directement que

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Donc

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Expression de A^n en fonction de n.
   Notons $D = P^{-1}AP$ la matrice diagonale obtenue précédemment, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}.PDP^{-1}.\ldots.PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

   On a

$$\forall n \geq 1,\ D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On a donc par un produit matriciel, on obtient :

$$\forall n \geq 1, A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3(-2)^n & 0 & 0 \\ (-2)^{n+1} + 2 & 3 & (-2)^{n+1} + 2 \\ 0 & 0 & 3(-2)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminons les réels λ pour lesquels $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas inversible.**

   Calculons donc le déterminant de $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$. Dans la base canonique, la matrice de $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ est $A - \lambda I_3$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) + 0 - 24 - 4(-4-\lambda) + 24(2-\lambda) - 0 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 18\lambda - 40 - 24 + 16 + 4\lambda + 48 - 24\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

   On en déduit donc que $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ non inversible si et seulement si $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

2. **Déterminons les noyaux des $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ pour les λ obtenus.**

- $\underline{\lambda = 0}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in \ \mathrm{Ker}(f - 0Id_E) \quad \Longleftrightarrow \quad AX = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 4z & = & 0 \\ 3x - 4y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + 5z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2z \\ -6z - 4y + 12z & = & 0 \\ -2z - 2y + 5z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2z \\ y & = & 3/2\, z \\ z & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc on a $\mathrm{Ker}(f - 0Id_E) = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- $\underline{\lambda = 1}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in \ \mathrm{Ker}(f - 1Id_E) \quad \Longleftrightarrow \quad AX = X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 4z & = & x \\ 3x - 4y + 12z & = & y \\ x - 2y + 5z & = & z \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x + 4z & = & 0 \\ 3x - 5y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -4z \\ y & = & 0 \\ z & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc on a $\mathrm{Ker}(f - 1Id_E) = Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- $\underline{\lambda = 2}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in \ \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) \quad \Longleftrightarrow \quad AX = 2X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 4z & = & 2x \\ 3x - 4y + 12z & = & 2y \\ x - 2y + 5z & = & 2z \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 4z & = & 0 \\ 3x - 6y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2y \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc on a $\text{Ker}(f - 2Id_E) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. **Cherchons alors une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est simple.**

Posons $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, on a vu que

$$f(e_1) = 0 \ , \ f(e_2) = e_2 \ , \ f(e_3) = 2e_3$$

Vérifions que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculons donc $\det(e_1, e_2, e_3)$:

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 3 - 0 + 2 - 0 = 1$$

Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3 : c'est ainsi une base de $\mathbb{R}^3$. On a ainsi trouvé une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$