Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Exercices pour le 19 Mars
Corrigé

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0 \\ f^8 + 16f^4 = 0 \end{cases}$$

1. **Déterminer le polynôme minimal de f.**.

   On sait que
   $$f^3 - 3f^2 + 2f = 0$$
   On en déduit que le polynôme P défini par :
   $$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$
   est un polynôme annulateur de f.
   Ainsi, le polynôme minimal π_f de f, qui est le plus petit des polynômes annulateurs de f, va diviser $X(X-1)(X-2)$.

   De même, on a :
   $$f^8 + 16f^4 = 0$$
   On en déduit que le polynôme Q défini par :
   $$Q(X) = X^8 + 16X^4 = X^4(X^4 + 16)$$
   est un polynôme annulateur de f.
   Ainsi, le polynôme minimal π_f va également diviser $X^4(X^4 + 16)$.

   Comme π_f divise P et π_f divise Q, on en déduit que
   $$\pi_f \mid PGCD(P, Q) = X$$
   donc
   $$\boxed{\pi_f = X}$$

2. **Que peut-on en déduire pour f ?**

   Le polynôme minimal est un polynôme annulateur de f :
   $$\pi_f(f) = 0$$
   Autrement dit,
   $$\boxed{f = 0}$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de A.**

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right] \\ &= (2-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2+1) \\ &= (2-\lambda)^3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\chi_A(X) = (2-X)^3}$$

2. **Déterminons le polynôme minimal de A.**
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. On a donc trois polynômes possibles pour π_f :

$$P_1(X) = X-2 \quad , \quad P_2(X) = (X-2)^2 \quad , \quad P_3(X) = (X-2)^3$$

Regardons donc lequel annule A en premier :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme minimal de A est le polynôme P_2 :

$$\boxed{\pi_A(X) = (X-2)^2}$$

3. **En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.**
Le polynôme minimal de A est un polynôme annulateur en A. On a donc

$$(A-2I)^2 = A^2 - 4A + 4I = 0$$

D'où

$$A(A-4I) = -4I$$

ce qui équivaut à

$$A\left[\frac{-1}{4}(A-4I)\right] = I$$

On en déduit donc que A est bien inversible et

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I}$$

Exercice 3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de B.**

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(4-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1 - 2(1-\lambda)\right] \\
&= -\lambda^3(4-\lambda)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\chi_A(X) = X^3(X-4)}$$

2. **Déterminons le polynôme minimal de B.**
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de B π_B divise le polynôme caractéristique χ_B et admet les mêmes racines que χ_B (en oubliant les multiplicités). On a donc trois possibilités pour π_B :

$$P_1(X) = X(X-4) \quad , \quad P_2(X) = X^2(X-4) \quad , \quad P_3(X) = X^3(X-4)$$

Regardons donc lequel annule B en premier :

$$B(B-4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\pi_B = P_1$:

$$\boxed{\pi_B(X) = X(X-4)}$$