Exercices pour le 26 Mars

Corrigé

Exercice 1

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **Déterminons le polynôme caractéristique de A.**

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-3-\lambda)^2 \left[(-5-\lambda)(-1-\lambda) + 4 \right] \\
&= (-3-\lambda)^2 (3+\lambda)^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (3+\lambda)^4}$$

2. **Montrons que A n'est pas diagonalisable.**
<u>1ère méthode :</u> Par l'absurde.
Supposons que A soit diagonalisable. Alors :

$$\exists P \in GL_4(\mathbb{R}) \ / \ PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & & & 0 \\ & -3 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix}$$

On a donc $PAP^{-1} = -3I_4$, c'est-à-dire :

$$A = P^{-1}(-3I)P = -3P^{-1}P = -3I \quad : \quad \text{impossible}$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

2ème méthode : A n'admet donc qu'une seule valeur propre $\lambda = -3$. Calculons le sous-espace propre associé à -3.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A+3I_4) \iff AX = -3X \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \\ -3t \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z+2t & = & 0 \\ x-y+z+2t & = & 0 \\ -2z+4t & = & 0 \\ -z+2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y-4t \\ y & = & y \\ z & = & 2t \\ t & = & t \end{array} \right.$$

Donc on a $\mathrm{Ker}(A+3I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension $\neq 4$. Donc A n'est pas diagonalisable.

3. **Déterminons une réduite de Jordan de A.**

On pose $M = A + 3I$.

–

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $rg(M) = 2$ car $C_2 = -C_1$ et $C_4 = -2C_3 + 4C_1$.
Donc d'après le théorème du rang, on a

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(M) = 2}$$

–

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement $C_4 = C_3$. Donc $rg(M^2) = 1$, d'où par le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker}(M^2) = 3$$

–

$$M^3 = 0$$

Donc on a clairement

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(M^3) = 4 = \text{ multiplicité de } -3 \text{ dans } \chi_A.}$$

Donc, on en déduit que la réduite de Jordan de A comporte deux blocs associés à la valeur propre 3 (car $\dim \mathrm{Ker}(M) = 2$), et on sait que le plus grand des blocs est de taille 3 car $M^3 = 0$.
On sait donc que, dans une base de Jordan, la matrice réduite de Jordan sera de la forme :

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

Précisons la base de Jordan et la matrice de passage.
On choisit donc un vecteur $v_3 \in \mathrm{Ker}(M^3)\backslash\mathrm{Ker}(M^2)$:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$v_2 = Mv_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nous manque un vecteur u qui soit dans $\mathrm{Ker}(M)\backslash\, Vect(v_1)$:

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi (u, v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan dans laquelle la réduite de Jordan est exactement J. La matrice de passage correspondante est alors

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Calculons le polynôme minimal de A.**
Le polynôme minimal de A est donné directement par la réduite de Jordan. En effet, on sait que lorsque

$$\chi_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Alors, le polynôme minimal de A est donné par

$$\pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_k)^{n_k}$$

où pour tout i, n_i désigne la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i.

Ici : il n'y a qu'une valeur propre : $\lambda = -3$. De plus, son plus grand bloc est de taille 3. Donc le polynôme minimal de A est :

$$\boxed{\pi_A(X) = (X+3)^3}$$

5. **En déduire l'expression de A^{-1}.**
Le polynôme minimal est un polynôme annulateur de A. Donc :

$$(A + 3I)^3 = 0$$

Autrement dit

$$A^3 + 9A^2 + 27A + 27I = 0$$

On peut donc écrire que

$$A\left(A^2 + 9A + 27I\right) = -27I$$

c'est-à-dire exactement que A est inversible et son inverse est

$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{27}\left(A^2 + 9A + 27I\right)}$$

Exercice 2

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ semblable à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) **Déterminons les valeurs propres de A et le déterminant de A.**
Comme les matrices A et B sont semblables, elles ont le même déterminant et les mêmes valeurs propres. La matrice A admet donc une unique valeur propre : 2. De plus, son déterminant est $2^5 = 32$.

(b) **La matrice A est-elle diagonalisable ?**
La matrice B n'est pas diagonalisable puisque B représente déjà la réduite de Jordan de B. Comme A et B sont semblables, A n'est donc pas diagonalisable.

(c) **Déterminer $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)$, $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)^2$, $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)^3$, $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)^{2008}$.**

- $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)$.
  Elle est donnée par le nombre de blocs de Jordan associé à 2 :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A-2I) = 2}$$

- $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)^3$.
  Vu que le plus grand bloc de Jordan associé à 2 est de taille 3, alors $\dim \mathrm{Ker}(A-2I)^3$ représente la multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynôme caractéristique. Ainsi

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A-2I)^3 = 5}$$

- $\dim \mathbf{Ker}(A-2I)^2$.
  On sait que

$$\mathrm{Ker}(A-2I) \subsetneq \mathrm{Ker}(A-2I)^2 \subsetneq \mathrm{Ker}(A-2I)^3$$

  On a donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(A-2I) \ < \ \dim \mathrm{Ker}(A-2I)^2 \ < \ \dim \mathrm{Ker}(A-2I)^3$$

  La valeur de $\dim \mathrm{Ker}(A-2I)^2$ ne peut donc être que 3 ou 4.

$$(B-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Comme $rg(B-2I)^2 = 1$, on en déduit par le théorème du rang que

$$\dim \mathrm{Ker}(A-2I)^2 = 4$$

(d) **Donnons le polynôme minimal de A.**
On sait que le polynôme minimal de A est donné par

$$\pi_A(X) = (X-2)^p$$

où p représente la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 2, c'est-à-dire $p = 3$. Finalement, le polynôme minimal de A est donné par :

$$\boxed{\pi_A(X) = (X-2)^3}$$