Exercices pour le 30 Avril

Corrigé

Exercice 1

Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4$$

1. **Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?**
   Q est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3, x_4. C'est donc bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

2. **Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?**
   σ_Q est définie sur $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^4, \quad \sigma_Q(x, y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

   On trouve ici que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^4$,

$$\sigma_Q(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2$$

   La matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires.**
   On applique la méthode de la réduction de Gauss.

$$\begin{aligned}
Q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4 \\
&= \left[2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{2}x_4^2\right] + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \left[2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_3^2\right] - x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 4x_3x_4 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + \frac{3}{2}x_4^2 + 4x_3x_4 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left[-\frac{3}{2}\left(x_3 - \frac{4}{3}x_4\right)^2 + \frac{8}{3}x_4^2\right] + \frac{3}{2}x_4^2 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x_3 - \frac{4}{3}x_4\right)^2 + \frac{25}{6}x_4^2 \\
&= \left[\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{1}{2}x_4\right)\right]^2 + \left[\sqrt{2}\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)\right]^2 - \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x_3 - \frac{4}{3}x_4\right)\right]^2 + \left[\frac{5}{\sqrt{6}}x_4\right]^2
\end{aligned}$$

4. **Est-ce que Q est positive ? non dégénérée ? Quel est son rang ?**
   Q n'est pas positive car il y a des carrés négatifs. Q n'est cependant pas dégénérée car son rang est de 4 (il y a 4 carrés non nuls).

Exercice 2

Soit $Q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_2x_5 - x_3x_4 + 2x_4x_5$$

1. **Pourquoi Q est-elle une forme quadratique ?**
   Q est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. C'est donc bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}^5$.

2. **Quelle est sa forme polaire σ_Q ? Quelle est la matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$?**
   σ_Q est définie sur $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^5, \quad \sigma_Q(x, y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

   On trouve ici que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^5$,

$$\sigma_Q(x,y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2 + x_2y_5 + x_5y_2 - \frac{1}{2}x_3y_4 - \frac{1}{2}x_4y_3 + x_4y_5 + x_5y_4$$

   La matrice de σ_Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Décomposer Q en somme et différence de carrés de formes linéaires.**
   On applique la méthode de la réduction de Gauss.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_2x_5 - x_3x_4 + 2x_4x_5 \\
&= \left[(x_1 - x_3 + 2x_5)(x_2 + x_3) + x_3^2 - 2x_3x_5\right] - x_3x_4 + 2x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5)^2 + x_3^2 - x_3x_4 - 2x_3x_5 + 2x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5)^2 + \left[\left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2 - x_5^2 - x_4x_5\right] + 2x_4x_5 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + x_4x_5 - x_5^2 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 + \left[-\frac{1}{4}(x_4 - 2x_5)^2 + x_5^2\right] - x_5^2 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_5)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5\right)^2 - \frac{1}{4}(x_4 - 2x_5)^2
\end{aligned}$$

4. **Est-ce que Q est positive ? non dégénérée ? Quel est son rang ?**
   Q n'est pas positive car il y a des carrés négatifs. Q a un rang égal à 4 (il y a 4 carrés non nuls), elle est donc dégénérée (car $rg(Q) \neq 5$).