Exercices pour le 21 Mai

Corrigé

Exercice 1

1. **Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminons la matrice de la projection orthogonale sur la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.**

   Déterminons déjà une base orthonormée de D.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a : $X \in D \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$.

   On a ainsi : $D = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

   Il reste à normer ce vecteur : on pose $\boxed{u = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$. Alors (u) est une base orthonormée de D.

   Calculons les images des vecteurs de la base canonique e_1, e_2 et e_3 par la projection orthogonale sur D.

   $$p_D(e_1) = < e_1|u > u = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] . \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

   $$p_D(e_2) = < e_2|u > u = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] . \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

   $$p_D(e_3) = < e_3|u > u = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big| \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] . \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

   La matrice de la projection sur D est ainsi :

   $$\boxed{\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

2. **Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Déterminons la matrice de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.**

   Déterminons déjà une base orthonormée de P.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a : $X \in P \Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment bien une base de P. De plus, on remarque que ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux. Pour avoir une base orthonormée, il suffit donc de les normer.

On pose donc :

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad , \quad \boxed{u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

La base (u_1, u_2) ainsi déterminée est une base orthonormale de P.

Calculons les images des vecteurs de la base canonique e_1, e_2 et e_3 par la projection orthogonale sur D.

$$p_P(e_1) = < e_1|u_1 > u_1 + < e_1|u_2 > u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$p_P(e_2) = < e_2|u_1 > u_1 + < e_2|u_2 > u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$p_P(e_3) = < e_3|u_1 > u_1 + < e_3|u_2 > u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

La matrice de la projection sur P est ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. **Montrons que A a deux valeurs propres entières**.
   Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= -X\begin{vmatrix} -3-X & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3-X & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -X\begin{vmatrix} -3-X & 4+X & X & 8+X \\ 1 & -4-X & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -4-X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= X(4+X)\begin{vmatrix} 4+X & 8+X \\ -4-X & -4 \end{vmatrix} = X(4+X)^3 \end{aligned}$$

   Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique, A a donc deux valeurs propres qui sont 0 et -4.

2. **Déterminons les sous-espaces propres et déduisons-en que A n'est pas diagonalisable.**

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$X \in E_0(A) \Longleftrightarrow AX = 0 \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -3x+y-3z+5t & = & 0 & (L_1) \\ x-3y+5z-3t & = & 0 & (L_2) \\ x+y-3z+t & = & 0 & (L_3) \\ x+y+z-3t & = & 0 & (L_4) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccll} 0 & = & 0 & (L_1)+(L_2)+(L_3)+(L_4) \\ x-3y+5z-3t & = & 0 & (L_2) \\ x+y+z-3t & = & 0 & (L_4) \\ z-t & = & 0 & (L_4-L_3) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} x-3y & = & -2t \\ x+y & = & 2t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\boxed{E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$$X \in E_{-4}(A) \Longleftrightarrow AX = -4X \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} -3x+y-3z+5t & = & -4x \\ x-3y+5z-3t & = & -4y \\ x+y-3z+t & = & -4z \\ x+y+z-3t & = & -4t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcc} x+y-3z+5t & = & 0 \\ x+y+5z-3t & = & 0 \\ x+y+z+t & = & 0 \\ x+y+z+t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} x+y & = & -2t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccr} x & = & -y-2t \\ y & = & y \\ z & = & t \\ t & = & t \end{array} \right.$$

Donc

$$\boxed{E_{-4}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Comme $\dim(E_{-4}(A) = 2 \neq 3$ (3 est la multiplicité de -4 en tant que racine du polynôme caractéristique), on en déduit que notre matrice A n'est pas diagonalisable.

3. **Ecrivons la matrice de Jordan J et précisons la matrice de changement de base.**

Pour la valeur propre 0, il y a 1 bloc de Jordan car $\dim E_0(A) = 1$. Or, 0 a pour multiplicité 0 dans le polynôme caractéristique, donc son bloc de Jordan est de taille 1. Il est donc entièrement déterminée par le vecteur propre trouvé précédemment.

Pour la valeur propre -4, il y a 2 blocs de Jordan car $\dim E_{-4}(A) = 2$. Posons donc $M = A + 4I$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a vu que $\dim \mathrm{Ker} M = 2$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

On a de manière évidente $rg(M^2) = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker} M^2 = 3$.
Comme 3 est la multiplicité de -4 en tant que racine du polynôme caractéristique, cela signifie que le plus grand des blocs de Jordan associé à la valeur propre -4 est de taille 2. Le second sera donc ainsi de taille 1.
On a donc déjà la matrice de Jordan voulue :

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Cherchons la matrice de Passage.

Cherchons $u_3 \in \mathrm{Ker} M^2 \backslash \mathrm{Ker} M$: Le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Puis, on prend $u_2 = Mu_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On a donc notre bloc de Jordan de taille 2.
On complète alors avec le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La matrice de passage est donc la matrice :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. **Calculons le polynôme minimal de A.**
Le polynôme minimal de A est directement vu sur la matrice de Jordan. En effet, on le détermine avec

$$\pi_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les α_i représentent la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i. On a donc ici :

$$\boxed{\pi_A(X) = X(X+4)^2}$$