Université Claude Bernard Lyon 1 — 2007-2008

L2 MASS41 Algèbre

# Révisions Contrôle Continu

---

1. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ espace vectoriel de dimension finie $n$ sur $\mathbb{C}$.
   Donner les définitions du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de $f$.
   Calculer les si $n = 4$ et une matrice de $f$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner la définition des sous-espaces caractéristiques ; donner leurs dimensions.
   Calculer-les si une matrice de $f$ est

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
   Montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de $f$ ont les mêmes racines.

4. Qu'est-ce qu'un endomorphisme nilpotent ?
   Enoncer et prouver la caractérisation au moyen du polynôme caractéristique et également au moyen du polynôme minimal.

5. Si $4f^2 - 2f + Id_E = 0$, quelles peut être les valeurs propres de $f$ ?

6. Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique $(X-5)^4(X-4)^2$ et même polynôme minimal $(X-5)^2(X-4)$.
   Justifier la raison pour laquelle vos deux matrices ne sont pas semblables.

7. On suppose que $f$ admet pour polynôme minimal $(X-1)(X-2)$. Calculer $f^n$ pour tout $n \geq 1$.
   Même question pour les polynômes minimaux $(X-3)^2(X+1)$ et $(X-1)^3$

8. Que peut-on dire de $f$ s'il est annulé par les polynômes $P = 1 - X^3$ et $Q = X^2 - 2X + 1$ ?

## Exercice 1

Soit $n \geq 1$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$.

1. Montrer que $f$ est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de $f$ ; diagonaliser $f$.

## Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$.
2. Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable.
3. Ecrire la matrice de Jordan $J$.
4. Ecrire une matrice de changement de base $P$. Calculer son inverse.
5. Calculer le polynôme minimal de $A$.

## Exercice 3

Déterminer les suites $(u_n)$, $(v_n)$ satisfaisant le système de relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} & = & 6u_n - 6v_n \\ u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

On posera pour tout $n \geq 0$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.