Révisions Examen

---

1. Rappeler et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour φ une forme bilinéaire symétrique positive. Dans le cas où φ est définie positive, étudier le cas d'égalité.

2. Soit p un projecteur orthogonal de E, c'est-à-dire qu'il existe un sev F de E tel que p soit le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
   Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E.
   L'endomorphisme p est-il diagonalisable ?

3. Soit A une matrice réelle inversible. Montrer que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice orthogonale, autrement dit :
$$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ A = \Omega T \qquad \text{avec} \left| \begin{array}{l} T \text{ triangulaire supérieure} \\ \Omega \text{ orthogonale} \end{array} \right.$$
   Quel procédé usuel traduit cette égalité matricielle ?

4. Montrer que pour toute forme linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = < x | \, a >$$

5. Rappeler la définition d'une matrice S réelle symétrique définie positive.

6. Soit $F = Vect((1,1,1),(1,0,-1))$. Soit $X = (1,2,3)$.
   (a) Déterminer une base orthonormée de F.
   (b) Déterminer $p_F(X)$ la projection orthogonale du vecteur X sur F
   (c) Déterminer $s_F(X)$ le symétrique orthogonal du vecteur X par rapport à F.
   (d) Déterminer $d(X,F)$ la distance du vecteur X à F.

7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne, calculer la distance du point $a = (2,1,-5)$ au plan d'équation $3x + 2y - z = 0$.

8. Soit S une matrice symétrique réelle.
   (a) Montrer que les valeurs propres de S sont toutes réelles.
   (b) Montrer que S est positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives.

9. Pour les formes quadratiques suivantes, déterminer une décomposition de Gauss, le rang, la signature et une base orthogonale :
$$q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$
$$q_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$
$$q_3(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$$
$$q_4(x) = x_1x_2 + x_1x_3$$