Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Fiche 1 - Révisions Algèbre linéaire

Exercice 1

On considère les vecteurs $u = (2, -2, 2), v = (0, -1, 2), w = (1, -2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Donner une base de $F = Vect(u, v, w)$.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.
4. Comparer F et G.

Exercice 2

On considère les vecteurs $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$, $w = (3, 3, -5)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $F = Vect(u, v, w)$.
2. On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en posant, pour tout vecteur $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$:
$$f(x) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma)$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\mathrm{Im} f$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im} f$.

Exercice 3

Factoriser dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = X^3 - 3X^2 + 4$$
$$P_2 = X^3 - 3X^2 - 6X + 8$$
$$P_3 = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 4X - 3$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1, 3x_1 + x_2)$$

Vérifier que f est linéaire. Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 3, 4)$ et $u_3 = (4, 9, 16)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 4A + 3I$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que A est inversible. Préciser son inverse.

Exercice 8

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -12 \\ -2 & 0 & -2 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker} f$. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. Quel est le rang de f ? Donner une base de $\mathrm{Im} f$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
4. On considère les vecteurs $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = -6e_2 + 3e_3$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $w = -4e_1 - 6e_2 + 7e_3$. Calculer $f(w)$ en fonction de w.
6. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2, v_3. Donner la matrice $A' = mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
7. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
8. Retrouver A' en utilisant P et P^{-1}.

Exercice 9

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 11 \\ 3 & -6 & 43 \\ -4 & 8 & 29 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

Exercice 10

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et préciser son inverse.