Fiche 2 - Diagonalisation/Trigonalisation

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous-espaces propres.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
6. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, donner une telle base.
3. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice de A de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$.
3. Trouver les valeurs propres de f.
4. Déterminer les vecteurs propres de f.
5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser (pour $a \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -a-1 & a & a+1 \\ -a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle les définitions suivantes :

– f est un *projecteur* de E si et seulement si $f \circ f = f$.

– f est une *symétrie* de E si et seulement si $f \circ f = Id_E$.

Montrer que tout projecteur et toute symétrie de E sont diagonalisables.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 7A - 6I_9$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 7

Soit $n \geq 1$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Déterminer les éléments propres de f ; diagonaliser f.

Exercice 8

Calculer u_n pour tout n de $\mathbb{N}$ sachant que

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exercice 9

Trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$