Fiche 3 - Polynômes annulateurs

Exercice 1

Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit P un polynôme annulateur de f. Montrer que si λ est une valeur propre de f, $P(\lambda) = 0$.
2. On suppose que f admette un polynôme minimal π_f. Montrer que les valeurs propres de f sont exactement les racines de π_f.

Exercice 2

Déterminer un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
En déduire une expression de A^{-1} lorsqu'elle existe.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Calculer son polynôme caractéristique χ_A.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension n.
On suppose que f possède une unique valeur propre λ.

1. A quelle condition f est-il diagonalisable ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de f.
3. Montrer que l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ est nilpotent.

Exercice 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

1. La matrice A est-elle diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
2. La matrice B est-elle diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^4 = f^2$ et admet 1 et -1 pour valeurs propres.
Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer π_A le polynôme minimal de A.