Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Fiche 5 - Algèbre bilinéaire

Exercice 1

On considère les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u(0)v(0) + \displaystyle\int_0^1 u'(t)v'(t)dt \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u(0)v(1) \end{array}$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des formes bilinéaires. Sont-elles symétriques ?
2. Ecrire la matrice de φ_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser si φ_2 est dégénérée.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie par :

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 13x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2$$

1. Ecrire la matrice A de φ relativement à la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang et le noyau de φ.
2. Donner la forme quadratique q qui lui est associée.
3. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, telle que :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \psi\left((u(x), y\right)$$

   (a) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$, en fonction des matrices A de φ et S de ψ
   (b) Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont φ-orthogonaux et ψ-orthogonaux à la fois.

Exercice 3

Soit l'application q de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad , \quad q(x) = 16x_1^2 - 16x_2^2 + 5x_3^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique.
2. Ecrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et donner la forme polaire associée φ.
3. Donner une réduction de Gauss de q, en précisant une base orthogonale ainsi que le rang et la signature de q.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes.
5. Trouver l'orthogonal de $F = Vect(e_1, e_2 + 2e_3)$.

Exercice 4

On définit les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3 \\ q_2(x) &= 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 \\ q_3(x) &= 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ q_4(x) &= x_1^2 - 2x_2x_3 - x_1x_3 \end{aligned}$$

Trouver les réductions de Gauss de ces formes quadratiques, en précisant une base orthogonale ainsi que le rang et la signature. On précisera, pour chaque forme quadratique, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la forme polaire associée.

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et a un vecteur non nul de E.
Soient q une forme quadratique sur E, non dégénérée, et φ sa forme polaire.
On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = q(a)q(x) - (\varphi(a,x))^2$$

1. Montrer que f est une forme quadratique et donner sa forme polaire ψ.
2. Quel est le noyau de f ? Quel est son rang ?

Exercice 6

On considère la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^4 \quad , \quad \varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_4 - 3x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3$$

1. Ecrire la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Préciser le rang et le noyau de φ.
2. Donner la forme quadratique q qui lui est associée.
3. Déterminer une réduction de Gauss de q en précisant une base q-orthogonale et la signature de q.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.