Université Claude Bernard Lyon 1 — 2007-2008

L2 MASS41 Algèbre

Fiche 6 - Espaces euclidiens

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel.
Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive sur E.
On note la forme quadratique associée q.

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$$\forall x, y \in E, \quad (\varphi(x,y))^2 \leq q(x)q(y)$$
2. On suppose q définie positive. Etudier alors le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 2

1. La forme bilinéaire suivante est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$?
$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$
2. Les formes quadratiques suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2 \\ q_2(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2 \end{aligned}$$

Exercice 3

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
$$u = (1,0,1,0) \quad , \quad v = (0,1,-1,0) \quad \text{et} \quad w = (0,2,3,1)$$
Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 4

1. Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{R}_2[X])^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 5

Sot $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit sur E la forme :
$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i \qquad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On considère le sous-espace F de E engendré par les polynômes :
$$P_1(X) = 2 + 2X + X^2 - 4X^3 \quad , \quad P_2(X) = 2 + X^2 \quad , \quad P_3(X) = 2X + X^3$$
   (a) Donner une base orthonormale de F.
   (b) Soit $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3$. Calculer la distance de Q à F.

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = tr({}^t AB)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note F l'espace vectoriel engendré par les matrices symétriques de E.
   (a) Donner une base et la dimension de F.
   (b) Déterminer $F^{\perp}$, l'orthogonal de F pour le produit scalaire φ.