Fiche 7 - Endomorphismes symétriques

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique

$$i.e.\ \forall x, y \in E,\ < x, f(y) >=< f(x), y >$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires et orthogonaux.
2. Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux à deux.
3. Soit F un sev de E stable par f. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par f.
4. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

Exercice 2

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $B = A + {}^tA$

1. Montrer que B est symétrique.
2. Montrer que si B est nilpotente, alors A est antisymétrique.

Exercice 4

Soit S une matrice réelle symétrique de taille n. Montrer que

1. S est positive si et seulement si $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$
2. S est définie positive si et seulement si $Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 5

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

1. ${}^tASA \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
2. $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \implies {}^tASA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
3. $\left| \begin{array}{l} S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ A \in GL_n(\mathbb{R}) \end{array} \right. \implies {}^tASA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$

Exercice 6

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que la matrice $A + B$ est inversible.

Exercice 7

Résoudre dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl} {}^tXYX & = & I_n \\ {}^tYXY & = & I_n \end{array} \right.$