Université Claude Bernard Lyon 1 2007-2008
L2 MASS41 Algèbre

Fiche 8 - Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1

Soit f un *endomorphisme orthogonal* de E (ou *isométrie* de E), c'est-à-dire tel que

$$\forall x, y \in E, \quad < f(x)|f(y) >=< x|y >$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de E.

1. Montrer que ${}^tMM = M\,{}^tM = I$.
2. Montrer que $\det(f) \in \{\pm 1\}$
3. On suppose que f est diagonalisable.
   (a) Déterminer les valeurs propres possibles de f.
   (b) Montrer que f est une symétrie.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;/\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Préciser une base orthonormale de F.
2. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F. Préciser une base orthonormale de $F^\perp$.
3. Donner l'expression de $p_F(x)$, la projection orthogonale d'un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^3$ sur F. Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment.
4. Pour x dans $\mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x, F)$.
5. Ecrire la matrice (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F. Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$?
6. Ecrire la matrice (relativement à la base canonique) de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et d'axe $F^\perp$.

Exercice 3

Déterminer la matrice de la rotation r de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que

$$r(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{k} \qquad \text{et} \qquad r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \text{ avec } \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

Donner son angle de rotation.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe.
Etudier les endomorphismes de E représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$