Université Claude Bernard Lyon I 2000-2001
UE21 MASS

ALGEBRE

Contrôle Continu

Mercredi 4 Avril 2001

Durée : 1H30

Les calculatrices et les documents sont interdits

I.

On désigne par G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
$a = (1, 1, 2, 2)$, $b = (0, 1, 0, 2)$, $c = (3, 4, 6, 8)$, $d = (1, 0, 2, 0)$.
1) Montrer que $dim\ G = 2$.
2) Déterminer par leurs composantes sur la base duale $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$, les éléments d'une base de l'orthogonal $G^\perp$ de G.

II.

Soit X un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, on désigne par g un endomorphisme de X.
1) Montrer que :

$$Ker(g) \subseteq Ker(g \circ g) \ \ et \ \ Im(g \circ g) \subseteq Im(g)$$

2) On suppose, de plus, que X est de dimension finie. Montrer que :

$$Im(g \circ g) = Im(g) \ si\ et\ seulement\ si\ Ker(g \circ g) = Ker(g)$$

III.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par B la base (a_1, a_2, a_3).
On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $f \circ f = 5f - 4id_E$ où id_E désigne l'application identique de E.
2) En déduire que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f et id_E.
3) a) Montrer que $Ker(f - id_E) \cap Ker(f - 4id_E) = \{0_E\}$.
b) Montrer que $Ker(f - Id_E)$ et $Ker(f - 4Id_E)$ sont supplémentaires dans E.
4) On pose :

$$b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3,\ b_3 = a_1 + a_2 - a_3$$

Montrer que la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E, base que l'on notera B'.
5) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.
6) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.
7) Calculer A^n pour tout entier n de $\mathbb{Z}$.