Université Claude Bernard Lyon I 2001-2002
UE21 MASS

ALGEBRE

Contrôle Continu

Vendredi 19 Avril 2002

Durée : 1H30

Les calculatrices et les documents sont interdits

I.

Calculer le déterminant de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \\ 7 & 11 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

En déduire le déterminant de:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 20 \\ 4 & 10 & 18 & 26 \\ 8 & 16 & 24 & 30 \\ 14 & 22 & 28 & 32 \end{pmatrix}$$

II.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 4.

On suppose $F_1 \not\subseteq F_2$, $dim\ F_1 = 2$ et $dim\ F_2 = 3$.

Quelles sont les dimensions de $F_1 + F_2$ et de $F_1 \cap F_2$?

III.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ dont on désigne par B la base canonique (e_1, e_2, e_3).

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) On pose :

$$b_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ b_2 = f(e_2)\ b_3 = f(e_3)$$

Montrer que la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E, base que l'on notera B'.

2) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.

3) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.

4) A est-elle inversible ?

5) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

6) Déterminer $Ker\ f$ et $Im\ f$.