**Université Claude Bernard Lyon I**
**UE21 MASS** 2002-2003

# ALGEBRE

## Contrôle Continu

**Vendredi 18 Avril 2003**

**Durée : 1H30**

**Les calculatrices et les documents sont interdits**

**Exercice 1.** Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (2,1,-1), \quad v_3 = (1,1,0), \quad v_4 = (1,-1,1)$$

1) Les familles $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sont-elles libres ? génératrices ?

2) Soit $F := Vect(v_1, v_2)$ et $G := Vect(v_3, v_4)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_3, v_4\}$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$. $F \cup G$ est-il un espace vectoriel ?

3) Soit $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x - y = 0 \;\; et \;\; x + z = 0\}$.
Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Qu'est géométriquement cet ensemble ?
Est-ce que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$ ?

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$; $f^2$ désigne $f \circ f$.

1) Montrer que $Im\ f^2 \subset Im\ f$ et $Ker\ f \subset Ker\ f^2$.

2) Montrer les implications suivantes :

$$Im\ f = Im\ f^2 \Longrightarrow Ker\ f = Ker\ f^2 \Longrightarrow E = Ker\ f \oplus Im\ f \Longrightarrow Im\ f = Im\ f^2$$

Que peut-on en conclure ?

**Exercice 3.** On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1,1,-1,1)$, $v = (1,0,2,0)$ et $w = (0,1,1,1)$.
Montrer que $u$, $v$ et $w$ sont linéairement indépendants.
Déterminer par leurs coordonnées sur la base duale $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, les éléments d'une base de l'orthogonal $F^\perp$ de $F$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

Déterminer la dimension de l'orthogonal de $F \cap G$ en fonction des dimensions de $E$, $F$, $G$ et $F+G$.

**Exercice 5.** On désigne par $F$ un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et par $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $F$.

On considère l'endomorphisme $f$ de $F$ dont la matrice $A$ dans la base $B$ est $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $f$.

2) Déterminer $Ker\ f$, donner la dimension et une base de $Ker\ f$.

3) Quel est le rang de $f$ ? Donner une base de $Im\ f$.

4) On considère les 3 vecteurs $v_1 = e_1,\ v_2 = -e_1 + e_2,\ v_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

Montrer que $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $F$, on la notera $B'$.

5) Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ en fonction de $v_1, v_2, v_3$.

Donner la matrice $A'$ de $f$ dans la base $B'$.

6) Ecrire la matrice de passage $P$ de la base $B$ à la base $B'$. Calculer $P^{-1}$.

7) $A$ est-elle inversible ? si oui donner son inverse.

8) Calculer $A^n$ pour tout entier naturel $n$.