Université Claude Bernard Lyon 1

DEUG MASS - UE 21

Épreuve d'Algèbre

Première session de JUIN 2003

Lundi 2 juin 2003 - Durée : 2 heures

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

I.1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit F_a le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ constitué des triplets (x, y, z) tels que $3x - y + 2z = a$. Pour quelle valeur de a, F_a est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Que représente géométriquement F_a ?

I.2 Soit E un espace vectoriel sur un corps K.
- Soient $x_1, \ldots, x_n$, n éléments de E. A quelle condition ces n éléments forment-ils une famille libre?
- Les vecteurs $x_1 := (1, 2, 4),\ x_2 := (5, 1, 1),\ x_3 := (4, 4, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ forment-ils une famille libre ? Même question pour les vecteurs $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 := (2, 5, 4)$.

I.3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y, z) := (x + 2y + z,\ 2x + y - z)$. Dire pourquoi f est linéaire. Ecrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

I.4 Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques $e_1,\ e_2$ de $\mathbb{R}^2$ et b_1, b_2, b_3 de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Si $u := x\ e_1 + y\ e_2$, que vaut $g(u)$?

I.5 Quelle est la forme générale des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$?
Soit $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une telle application. Si h n'est pas identiquement nulle, quelle est la dimension de son noyau ? de son image ? Quel objet géométrique représente le noyau?

I.6 Rappeler la formule du rang.
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace de dimension 4. On les suppose non inclus l'un dans l'autre. Si la dimension de F_1 est 3 et celle de F_2 est 2 quelle est la dimension de $F_1 \cap F_2$?
Quel est le rang d'une matrice ? Quel est le rang de A : $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

I.7 Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 2 \\ 3x + 4y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

I.8 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

T.S.V.P.

I.9 Soit $A := (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ une matrice carrée d'ordre n.

a) Donner l'expression du déterminant de A faisant intervenir les permutations des entiers $1, \dots, n$.

b) Soit σ la permutation des entiers de 1 à 12 définie ci-dessous :

$$\sigma \; := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 12 & 6 & 10 & 8 & 11 & 1 & 7 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_\sigma := (p_{ij})_{\substack{i=1,\dots,12\\ j=1,\dots,12}}$ la matrice 12×12 telle que $p_{ij} = 1$ si $\sigma(j) = i$, $p_{ij} = 0$ sinon. Calculer le déterminant de P_σ et l'inverse de P_σ.

I.10 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou C).

a) Donner les définitions de valeur propre, vecteur propre, de sous-espace propre et de polynôme caractéristique de f.

b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Et sur $\mathbb{C}$?

Exercice

Soit $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

II.1 Calculer le polynôme caractéristique X_A.

II.2 Calculer les valeurs propres; constatez que l'une, soit λ_1, est simple et que l'autre, soit λ_2 est double. Pouvez vous déduire de cela que A est diagonalisable?

II.3 Déterminer les sous-espaces propres. On déterminera le vecteur propre associé à λ_1 dont la première composante est -1. Pour λ_2 on trouvera deux vecteurs propres ayant pour première composante respectivement 0 et 1. Dites pourquoi A est diagonalisable.
Soit $B \; := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.4 Ecrire la matrice de passage P. Calculer son inverse P^{-1}.

II.5 Calculer B^n pour $n \geq 0$. Avec II.4, obtenir A^n.

II.6 Montrer que A^n peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1^n \; C_1 + \lambda_2^n \; C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux matrices constantes qu'on déterminera.