Université Claude Bernard Lyon 1

DEUG MASS - UE 21

Épreuve d'Algèbre

Deuxième session 2003

Mardi 8 juillet 2003 - Durée : 1H30

Les documents et les calculettes sont interdits.

Questions de cours

I.1 Donner un critère pour qu'une partie d'un espace vectoriel soit un sous-espace vectoriel. Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ constitué des triplets (x, y, z) tels que $3x - y + 2z = 0$ et $x - 2y + 5z = 0$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Que représente géométriquement F ?

I.2 Soit E un espace vectoriel sur un corps K.
- Soient $x_1, \ldots, x_n$, n éléments de E. A quelle condition ces n éléments forment-ils une famille libre? Énoncer une condition suffisante pour que des polynômes forment une famille libre. Soit P un polynôme de degré n, montrer que P et ses n dérivées forment une famille libre.

I.3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y) := (2y, 2x + y, 5x, 3x - 2y)$. Dire pourquoi f est linéaire. Écrire la matrice de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

I.4 Soit $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ de $\mathbb{R}^4$ et b_1, b_2 de $\mathbb{R}^2$ est $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si $u := x\ e_1 + y\ e_2 + z\ e_3 + t\ e_4$, que vaut $g(u)$?

b) Quel est le rang de A?

c) Rappeler la formule du rang. Donner les dimensions de l'image de g et de son noyau.

I.5 Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ 3x + 2y + 2t = 3 \\ x + y + z = -1 \\ -x + y + z - t = 1 \end{cases}$$

I.6 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 5 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$$

T.S.V.P.

I.7 Soit $A := (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$ une matrice carrée d'ordre n.

a) Donner l'expression du déterminant de A faisant intervenir les permutations des entiers $1, \ldots, n$.

b) Soit σ la permutation des entiers de 1 à 11 définie ci-dessous :

$$\sigma \ := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 6 & 9 & 2 & 10 & 5 & 11 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_\sigma := (p_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,11\\ j=1,\ldots,11}}$ la matrice 11×11 telle que $p_{ij} = 1$ si $\sigma(j) = i$, $p_{ij} = 0$ sinon. Calculer le déterminant de P_σ. Calculer P_σ^{14}.

I.8 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou C).

a) Donner les définitions de valeur propre, vecteur propre, de sous-espace propre et de polynôme caractéristique de f.

b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Et sur $\mathbb{C}$?

<u>Exercice</u>

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

II.1 Calculer le polynôme caractéristique X_A.

II.2 Calculer les valeurs propres; constatez que l'une, soit λ_1, est simple et que l'autre, soit λ_2 est double. Pouvez vous déduire de cela que A est diagonalisable?

II.3 Déterminer les sous-espaces propres. On déterminera le vecteur propre associé à λ_1 dont la première composante est 1. Pour λ_2 on trouvera deux vecteurs propres ayant pour première composante respectivement 1 et -1. Dites pourquoi A est diagonalisable.
Soit $B \ := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$

II.4 Ecrire la matrice de passage P. Calculer son inverse P^{-1}.

II.5 Calculer B^n pour $n \geq 0$. Avec II.4, obtenir A^n.

II.6 Montrer que A^n peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1^n \, C_1 + \lambda_2^n \, C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux matrices constantes qu'on déterminera.