Université Claude Bernard Lyon I 2003-2004
L1 MASS UE21

ALGEBRE

Contrôle continu
2 Avril 2004
Durée : 1 H30

Les documents et les calculatrices sont interdits

Exercice 1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - 6y + 2t = 0 \;\; et \;\; 4x + z - 3t = 0\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs :
$v_1 = (1, -1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, -1, 3, 2)$, $v_5 = (6, 2, 8, 2)$.
Soit $E \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_4 et $F \subseteq \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_3, v_5.
1) Pour chacun des sous-espaces $E + F$,E, F, $E \cap F$, donner une base.
2) Déterminer un supplémentaire de E.

Exercice 3. En utilisant la métode du pivot de Gauss, résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 7y & + & 4z & = & -2 \\ x & - & 3y & + & 3z & = & -1 \\ 4x & - & 8y & + & 7z & = & -3 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, on désigne par f un endomorphisme de E.
1) Montrer que :

$$Ker(f) \subseteq Ker(f \circ f) \;\; et \;\; Im(f \circ f) \subseteq Im(f)$$

2) On suppose, de plus, que E est de dimension finie. Montrer que :

$$Im(f \circ f) = Im(f) \text{ si et seulement si } Ker(f \circ f) = Ker(f)$$

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner des bases pour $Ker \; f$ et $Im \; f$.
2) Quelle est l'application $f^3 - 6f^2 + 9f$?
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $f^n = a_n f^2 + b_n f$.