Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

Unité d'enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Contrôle continu

2 Avril 2004 – durée : 1 heures 30

Les deux exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$. On notera 0_2 la matrice nulle et I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité :

$$(*) \qquad M^2 + M - 6I_2 = 0.$$

1) On suppose que $\{I_2, M\}$ est un système lié. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $M = \lambda I_2$.
2) Montrer (par l'absurde) que $\{I_2, M\}$ est un système libre si et seulement si $M \neq 2I_2$ et $M \neq -3I_2$. Ce que l'on supposera dans la suite.
3) Soit E le sous-espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et M. Quelle est sa dimension? Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4) Soit n un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ vérifiant $n^2 = n$. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^2$, $n(x) - x$ est dans le noyau de n.
5) Dans cette question, on cherche les matrices N de E qui vérifient $N^2 = N$.
a) Soit $N = xI_2 + yM \in E$, x, $y \in \mathbb{R}$. En utilisant (*), écrire la relation que l'on obtient à partir de la relation $N^2 = N$.
b) Donner alors le système que doivent vérifier x et y.
c) Donner une liste de toutes les matrices N de E vérifiant $N^2 = N$.
QUESTION BONUS: En utilisant 4), préciser les matrices inversibles de la liste.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynm̂e suivant :

$$P = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 4X + 4.$$

1) Calculer le polyôme dérivé P' de P.
2) On pose D =PGCD(P, P'). Calculer D (Pour éviter les fractions, on pourra chercher le PGCD de $8P$ et P').

3) Existe-t-il deux polynômes A et B premiers entre eux tels que $P = DA$ et $P' = DB$? Déterminer A.
4) Quelles sont les racines complexes de P? On précisera leur ordre de multiplicité.
5) Mettre P sous forme de produit de facteurs irréductibles
a) dans $\mathbb{C}[X]$.
b) dans $\mathbb{R}[X]$.