Correction du contrôle continu Math II algebre 2004

Exercice 1 1) La matrice M est non nulle, sinon, elle ne verifierait pas (*). Par hypothese, on peut trouver α et β non tous nuls tels que $\alpha M + \beta Id = 0$. Comme M est non nulle, α ne peut pas etre nul. Donc $M = -\frac{\beta}{\alpha}$.
2) Supposons que M, Id forme un systeme libre, alors $M = \lambda Id$. Donc, par (*), on obtient $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, d'ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -3$. Inversement, si $M = 2Id$ ou $M = -3Id$, M et Id sont clairement liees.
3) Par hypothese la dimension de l'espace est 2. Pour montrer que c'est un sous anneau, il suffit de montrer qu'il est stable par la multiplication.

$$(\alpha Id + \beta M)(\alpha' Id + \beta' M) = \alpha\alpha' Id + (\beta\alpha' + \alpha\beta')M + \beta\beta' M^2$$

$$= \alpha\alpha' Id + (\beta\alpha' + \alpha\beta')M + \beta\beta'(-M + 6Id) = (\alpha\alpha' + 6\beta\beta')Id + (\beta\alpha' + \alpha\beta' - \beta\beta')M \in E.$$

4) On a $n(n(x) - x) = n^2(x) - n(x) = 0$ donc $n(x) - x \in Ker(n)$.
5)a) D'apres 3), on a

$$(x^2 + 6y^2)Id + (2xy - y^2)M = xId + yM.$$

b) Par identification, cela donne

$$x^2 + 6y^2 = x,\ 2xy - y^2 = y.$$

c) On trouve les solutions de l'equation (1,0), (0,0), $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$.
QUESTION BONUS: Si $n \neq Id$, alors on peut trouver un vecteur x tel que $n(x) - x \neq 0$. Donc, d'apres 4), ce vectuer est non nul dans le noyan de n. Conclusion n n'est pas inversible. Donc, la seule matrice inversible est Id.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynm̂e suivant :

$$P = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 4X + 4.$$

1) $P' = 4X^3 - 6X^2 + 10X - 4$.
2) On pose $D =$PGCD(P, P'). Par l'algorithme d'Euclide on trouve $D = X^2 - X + 2$.
3) Existe-t-il deux polynômes A et B premiers entre eux tels que $P = DA$ et $P' = DB$? C'est une question de cours. En fait A et B existent car D divise P et P'. Ils sont premiers entre eux par l'identite de Bezout.
Pour calculer A on effectue la division euclidienne de P par D, on trouve : $A = X^2 - X + 2$.
4) On obtient donc $P = (X^2 - X + 2)^2$. On calcule facilement les racines de P : $x = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, (racines doubles).
5) a)

$$P = (X - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2})^2 (X - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2})^2.$$

b)

$$P = (X^2 - X + 2)^2$$

(comme le discriminant de A est negatif, A est irreductible sur $\mathbb{R}$).