Université Claude Bernard Lyon I 2004-2005

L1 MASS UE21

Contrôle continu
ALGEBRE
Lundi 11 Avril 2005

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés.

En ce qui concerne la notation, la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - 2y + z = 0 \ \text{ et } \ 2x + 3z - t = 0\}$.
1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2) Déterminer une base de E.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n(X) = (X + 1)^{2n+1} + X^{2n} - 1$.
1) Montrer que $X^2 + X$ divise $P_n(X)$.
2) Le nombre -1 est-il racine double de $P_n(X)$?

Exercice 3. Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par:

$$f[(x, y, z, t)] = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1) Calculer $f(e_1) + f(e_2)$ ainsi que $2f(e_1) + f(e_2)$.
En déduire une base de $Im\ f$. Quel est le rang de f ?
2) Déterminer la dimension de $Ker\ f$ et en préciser une base.
3) Montrer que $Ker\ f \oplus Im\ f = \mathbb{R}^4$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), on considère les vecteurs:

$$u = (1, -2, 3, 1), \ v = (2, -1, 2, 6), \ w = (-3, 5, -7, 1)$$

$$a = (1, 4, -5, 9), \ b = (0, 1, -1, 4), \ c = (-3, 4, -6, -3)$$

1) Calculer $3u - 2v$ et $u + v + w$.
2) Montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre.
3) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u, v, a\}$.
Déterminer la dimension de E et en préciser une base.
4) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{w, b, c\}$.
Déterminer la dimension de F et en préciser une base.
5) Déterminer $E + F$ et $E \cap F$ en précisant des bases.