Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

Unité d'enseignement Math II Algèbre

Contrôle continu de mathématiques

19 Novembre 2004 – durée : 1h 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application Φ de E dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\Phi(f) = (f(1), f(2)).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Soit $F = \{f \in E \mid f(1) = f(2) = 0\}$.

   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   b) Φ est elle injective?

   c) Φ est elle surjective?

Exercice 2 On considère le polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ suivant :

$$P(X) = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \ldots + \frac{1}{n!}X^n,$$

où n est un entier positif.

1. Montrer que $P(X) = P'(X) + \frac{1}{n!}X^n$.
2. En déduire que P n'a pas de racine multiple.
3. Combien P possède de racines distinctes dans $\mathbb{C}$?

Exercice 3 Déterminer le PGCD des polynômes $A = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B = 4X^3 + 6X^2 - 22X - 12$.

Exercice 4 On considère la matrice suivante de $M_{4,5}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Soit C_i sa i-ème colonne. Expliquer pourquoi tous les vecteurs colonnes $C_j - C_i$ sont colinéaires (on se contentera d'une justification rapide).

2. En déduire que trois vecteurs colonnes quelconques de A sont liées.

3. Quel est le rang de A?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.

2. Soit r le rang de f. Déduire de 1) que $2r \leq n$. On posera dans la suite $m = n-2r$.

3. Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$. Montrer que $\dim(G) = r$.

4. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de G. Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une partie libre de $\ker(f)$.

5. QUESTION BONUS. Montrer qu'il existe une famille $(e'_1, \dots, e'_m)$ de $\ker(f)$ telle que $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r), e'_1, \dots, e'_m)$ soit une base. Trouver la matrice de f dans cette base.