1 Exercice 1

1.1 Partie A

1. La matrice de ϕ est la matrice dont la j-ème colonne est l'écriture de $\phi(e_j)$ dans la base (e_1, e_2, e_3), on a donc
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \lambda_i e'_i = 0$.
$$\begin{aligned} 0 &= \sum \lambda_i e'_i \\ &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_2 + e_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + \lambda_3 e_3 \end{aligned}$$
Mais on sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, c'est donc en particulier une famille libre et donc $\lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. Puisqu'elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont la j-ème colonne est l'écriture de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, on a donc
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On exprime donc e_i en fonction de e'_i :
$$e_1 = e'_1,\ e_2 = e'_2 - e'_1,\ e_3 = e'_3 - e'_2 + e'_1$$
Ainsi,
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
4. La matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par la formule de changement de base
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2 Partie B

1. Si on note C_i les colonnes de B, on a
$$C_1 - C_2 + C_3 = C_4$$
2. On sait que $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(C_1, C_2, C_3, C_4) \leq 3$. Ainsi, $B \in M_4(\mathbb{R})$ est de rang strictement inférieur à 4, elle n'est donc pas inversible.
3. La sous-matrice obtenue en prenant les trois premières lignes et les trois premières colonnes de B est P dont on sait qu'elle est inversible. B possède donc une sous-matrice inversible de taille 3 d'où $\mathrm{rg}\,(B) \geq 3$ mais par la question précédente, $\mathrm{rg}\,(B) \leq 3$ d'où $\mathrm{rg}\,(B) = 3$.

2 Exercice 2

1. On écrit $X^n = (X-1)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg((X-1)) = 1$. On sait donc déjà que R est une constante. On évalue en 1 et on obtient $1 = R(1) = R$.
2. On pose $Y = X^6$, la division euclidienne de Y^n par $Y - 1$ est $Y^n = (Y-1)Q(Y) + 1$ par la question précédente. On a ainsi $X^{6n} = (X^6 - 1)Q(X^6) + 1$ et $0 = \deg(1) < \deg(X^6 - 1) = 6$ donc c'est bien la division euclidienne de X^{6n} par X^6 et le reste est aussi 1.

3 Excercice 3

1. Les racines de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines 6-èmes de l'unité, ce sont donc $-1, 1, j, j^2, -j - j^2$ et on obtient
$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2)$$

2. Pour factoriser sur $\mathbb{R}$, on utilise la factorisation dans $\mathbb{C}$ en regroupant les facteurs correspondant aux racines conjuguées
$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left((X-j)(X-j^2)\right)\left((X+j)(X+j^2)\right)$$
On a $(X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$ et $(X+j)(X+j^2) = X^2 - X + 1$. Ces deux polynômes étant de degré 2 et n'ayant pas de racines réelles, il sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation est alors
$$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

3. Soit $F(X) = \frac{1}{X^6-1}$, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ est de la forme
$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{eX+f}{X^2-X+1}$$
Pour obtenir a, on calcule $a = F(X)(X-1)_{|X=1} = \frac{1}{6}$. De même $b = F(X)(X+1)_{|X=-1} = -\frac{1}{6}$. Pour c et d, on calcule $F(X)(X^2+X+1)_{|X=j}$, on obtient
$$cj + d = \frac{1}{(j-1)(j+1)(j^2-j+1} = \frac{1}{2j-2}$$
On replace j par $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient
$$(d - \frac{1}{2}c) + ic\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{12}$$
Puisque c et d sont réels, on peut identifier partie réelle et partie imaginaire dans l'égalité, on obtient alors $c\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$ et $d - \frac{1}{2}c = -\frac{1}{4}$ et ainsi
$$c = -\frac{1}{6} \text{ et } d = -\frac{1}{3}$$
On peut obtenir e et f de la même manière. On remarque néanmoins que F est paire, on a donc
$$\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{eX+f}{X^2-X+1} = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{-cX+d}{X^2-X+1} + \frac{-eX+f}{X^2+X+1}$$
Par unicité de la décomposition en éléments simples, on obtient $e = -c = \frac{1}{6}$ et $f = d = \frac{1}{3}$, la décomposition sur $\mathbb{R}$ est donc
$$F(X) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \frac{-X-2}{X^2+X+1} + \frac{X-2}{X^2-X+1}\right)$$