Université Claude Bernard Lyon 1 2006-2007

L1 MASS UE21

Contrôle continu
ALGEBRE
Lundi 19 Mars 2007
Durée : 1h30

Les documents et les calculettes sont interdits.

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs :

$$u := (2,1,-1,1),\quad v := (-1,3,4,0),\quad w := (1,4,3,1),\quad u' := (0,0,1,-3),\quad v' := (1,4,4,-2).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u, v, w, et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u', v'.

1) Donner une base de E et une base de F.

2) Quelle est la dimension de $E \times F$? donner une base de $E \times F$.

3) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

4) Donner une base de $E + F$ et une base de $E \cap F$.

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -7 & -1 & 6 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $2u(e_1) + u(e_3) + 2u(e_4)$.

2) Donner une base de $Im(u)$.

3) Quel est le rang de u ?

4) Donner une base de $Ker(u)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et $B := (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -6 & 3 \\ 104 & -24 & 16 \\ 19 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

On pose:

$$v_1 := e_1 + 2e_2 - 3e_3, \qquad v_2 := e_1 + 4e_2 - e_3, \qquad v_3 := 2e_2 + 4e_3$$

1) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E que l'on notera B'.

2) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.

3) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

4) Calculer P^{-1}.

5) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4. (Question de cours)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si son rang est égal la dimension de E.

2) En déduire que si f est un endomorphisme de E, il y a équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité.