Université Claude Bernard Lyon 1 2006-2007
L1 MASS UE 21

ALGEBRE
DEVOIR n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 := (2,1,1), \quad u_2 := (3,-1,4), \quad v_1 := (1,1,0), \quad v_2 := (1,0,1).$$

Montrer que u_1 et u_2 engendrent le même sous-espace vectoriel que v_1 et v_2.

Exercice 2. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + 7y - 3z = 0\}.$$

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner une base de H.

3) Touver un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs :

$$u := (1,2,-3,4), \ v := (0,-1,4,2), \ w := (-3,4,2,0), \ u' = (1,1,1,6), \ v' = (2,-4,-7,-8)$$

1) Montrer que la famille $\{u,v,w\}$ est libre. Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

2) La famille $\{u,v,w,u',v'\}$ est-elle libre ? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

3) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u, v, u'. Donner une base de E.

4) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u, u+w, v'$.
Donner une base de $E+F$.

5) Donner une base de $E \cap F$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 5. $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus 2.
Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{C}^3$? Donner une base.