Université Claude Bernard Lyon 1 2006-2007
L1 MASS UE 21

ALGEBRE
DEVOIR n° 2

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice A relativement ̀la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} Cos\ \theta & -Sin\ \theta \\ Sin\ \theta & Cos\ \theta \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

2) Montrer que f est bijectif et calculer f^{-1}.

3) Calculer f^n pour tout entier relatif n.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}^4$ muni d'une base $B := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit $F := \mathbb{R}^3$ muni d'une base $B' := (f_1, f_2, f_3)$. Soit ϕ une application linéaire de E dans F définie par :

$$\phi(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3, \quad \phi(e_2) = 2f_1 - f_3, \quad \phi(e_3) = f_1 + f_2 - 3f_3, \quad \phi(e_4) = 2f_2 - 5f_3.$$

1) Soit $u \in E$ de composantes (x, y, z, t) dans B. Montrer que, dans B', $\phi(u)$ a pour composantes :

$$(x + 2y + z, -x + z + 2t, 2x - y - 3z - 5t)$$

2) Déterminer une base de $Ker\ \phi$.

3) Déterminer une base de $Im\ \phi$.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A relativement ̀la base canonique $B := (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs $V_1 := (2, -1, 0)$, $V_2 := (1, -1, 1)$ et $V_3 := (0, 0, 1)$.

1) Montrer que $B' := (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $f(V_1), f(V_2), f(V_3)$ en fonction de V_1, V_2, V_3.

3) Ecrire la matrice de f relativement à la base (V_1, V_2, V_3).

4) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}.

5) On considère les trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$, définies par leurs premiers termes $u_0,\ v_0,\ w_0$ et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &= -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n &= 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n &= 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{aligned}$$

Calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ en fonction de n et de $u_0,\ v_0,\ w_0$.