Université Claude Bernard Lyon 1 2006-2007
L1 MASS UE 21

ALGEBRE
DEVOIR $\mathbf{n^o}$ 3

Exercice 1. On considère les éléments f_1^*, f_2^*, f_3^* de $(\mathbb{R}^3)^*$ définis par :

$$f_1^*(x,y,z) = 2x - 3y + 7z, \qquad f_2^*(x,y,z) = 2x + y + z, \qquad f_3^*(x,y,z) = 4x + y - 3z.$$

1) Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) constitue une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
Trouver les composantes de f_1^*, f_2^*, f_3^* sur la base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer par leurs composantes sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de la base duale (f_1, f_2, f_3) de la base (f_1^*, f_2^*, f_3^*).
3) Soit F le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3)^*$ engendré par f_1^* et f_2^*. Déterminer une base de l'orthogonal de F.

Exercice 2. Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+2a & 2+16a & 0 & 2+4a & 2+8a \\ 4 & 256 & 0 & 16 & 64 \\ 3 & 81 & 0 & 9 & 27 \\ 7 & 12 & 3 & 26 & -8 \\ 2 & 16 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Soit σ la permutation des entiers de 1 à 10 définie ci-dessous :

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Soit $P_\sigma := (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq 10}$ la matrice 10×10 telle que :

$$p_{ij} = 1 \ si \ \sigma(j) = i, \quad p_{ij} = 0 \ sinon.$$

Quel est le déterminant de P_σ ?

Exercice 4.
1) Montrer que les vecteurs $u := (3,0,1)$, $v := (-2,-1,-1)$ et $w := (1,0,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de f par rapport à la base (u, v, w).
3) Sans déterminer les sous-espaces propres, montrer que f n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, on dit qu'un endomorphisme f de E est un projecteur de E si et seulement si $f \circ f = f$. Soit p un projecteur de E.
1) Déterminer les valeurs propres de p.
2) Montrer que $Ker(Id_E - p) = Im(p)$.
3) Montrer que $E = Im(p) \oplus Ker(p)$.
4) p est-il diagonalisable ?