UNIVERSITE CLAUDE BERNARD Année 2006-2007

Licence de Sciences et Technologies Groupe I Mention M.A.S.S.

MASS 21 : Mathématiques : Algèbre

Examen - Session 1 - Vendredi 1er Juin 2007 - Durée 2h

Tout objet ou document est interdit à l'exception de stylos, crayons, règles, gommes.

Toute question sans réponse rédigée sera notée 0.

Exercice 1 : Soit E l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. Soit f définie par :

$$\forall P \in E\,, \quad f(P) = (X^2+1)P' - 2XP$$

où P' est la dérivée première de P.

Q 1.1 : Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q 1.2 : Ecrire la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E.

Q 1.3 : Quelles sont la ou les valeurs propres ?

Q 1.4 : f est-il un automorphisme ?

Q 1.5 : f est-il diagonalisable dans E ?

Q 1.6 : Déterminer un ou des polynômes propres de f dans E.

Q 1.7 : Décrire le noyau de f.

Exercice 2 : A chaque nouvelle élection (numérotée k), 1/4 des électeurs qui avaient voté à gauche (g_{k-1}) [respectivement à droite (d_{k-1})] à l'élection précédente ($k-1$), se mettent à voter à droite [respectivement à gauche], 1/4 des deux catégories votent au centre, les autres restent fidèles à leur choix précédent. Les anciens électeurs du centre (c_{k-1}), se répartissent pour 1/3 dans chaque catégorie.

Q 2.1 : Ecrire la *matrice de transition* liant le vecteur $\begin{bmatrix} g_k \\ c_k \\ d_k \end{bmatrix}$ à $\begin{bmatrix} g_{k-1} \\ c_{k-1} \\ d_{k-1} \end{bmatrix}$.

Q 2.2 : Quel que soit le résultat de la première élection, que va-t-il se passer au bout d'un grand nombre d'élections (*état stationnaire*) ?

Exercice 3 : On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

Q 3.1 : Sans faire de calculs, dire pourquoi la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Quelle propriété peut-on imposer à une base de vecteurs propres ?

Q 3.2 : Déterminer ensuite les valeurs propres et une base de vecteurs propres ayant cette propriété.

Q 3.3 : Donner l'expression analytique de la forme bilineaire symétrique ayant B comme matrice.

Q 3.4 : Cette forme est-elle définie-positive ?

Exercice 4 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant comme valeurs propres 2,-4 et 7.

Q 4.1 : Expliquer pourquoi f est bijective

Q 4.2 : Donner les valeurs propres de f^{-1}.

Q 4.3 : Donner les valeurs propres de la transposée de f.